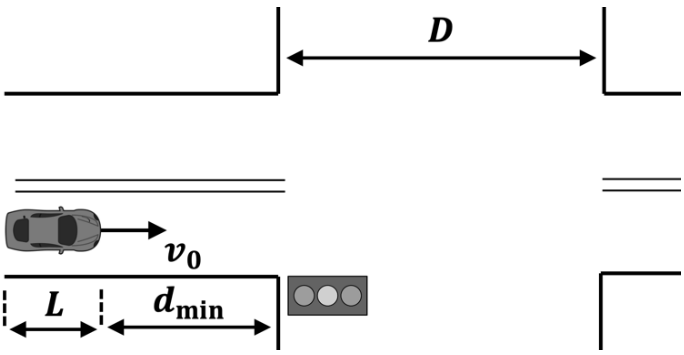
1. Аутомобил, укупне дужине $L = 4{,}15\ \mathrm{m}$, прилази раскрсници брзином сталног интензитета $v_0 = 45\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. У одређеном тренутку, на семафору који регулише саобраћај на тој раскрсници упали жуто свјетло. Након што возач аутомобила угледа жуто свјетло на семафору, потребно му је $t_r = 1{,}2\ \mathrm{s}$ да реагује и притисне кочницу. Усљед такве реакције возача, аутомобил почне равномјерно да успорава, успорењем константног интензитета $a = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Укупна ширина раскрснице је $D = 15\ \mathrm{m}$, док укупно вријеме трајања жутог свјетла на семафору износи $\Delta t = 3{,}8\ \mathrm{s}$ (слика 1).

(а) Одредите на којој се минималној удаљености (d_{min}) од почетка раскрснице може налазити аутомобил, у тренутку укључивања жутог свјетла на семафору, тако да се он заустави прије него што уђе у раскрсницу.

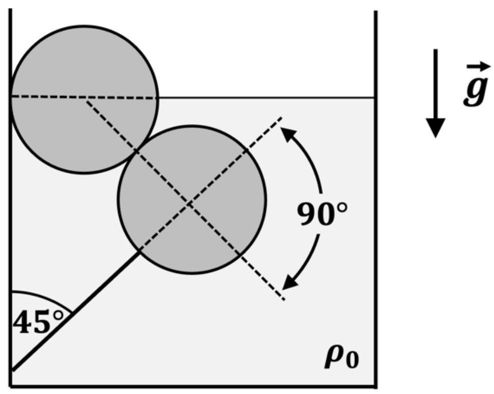
(б) Замислимо сада да се свјетло на семафору упалило у тренутку када се аутомобил налазио на растојању d_{min}од уласка у раскрсницу, као и да се аутомобил кретао сталном брзином интензитета $v_0 = 45\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Након времена $t_r = 1{,}2\ \mathrm{s}$ од тог тренутка, возач реагује на свјетлосни сигнал и, умјесто да притисне кочницу и почне да успорава, он притишће педалу гаса и равномјерно повећава брзину аутомобила и пролази кроз раскрсницу прије укључивања црвеног свјетла на семафору. Колики треба да буде најмањи интензитет убрзања аутомобила (a_{min}), такав да он прође кроз раскрсницу прије паљења црвеног свјетла на семафору? Користите резултат добијен у претходном дијелу задатка.

(в) Одредите интензитет брзине аутомобила (v) на изласку из раскрснице (за претходни дио задатка).

2. Двије хомогене кугле, направљене од истог материјала непознате густине, налазе се у вертикалном суду испуњеним глицерином густине $\rho_0 = 1260\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Доња кугла везана је за зид суда лаким и неистегљивим ужетом, тако да правац ужета са тим вертикалним зидом заклапа угао $\alpha = 45°$ (слика 2). Горња кугла је до пола своје висине потопљена у течност, а са лијеве стране додирује зид суда. Израчунајте густину материјала од којег су кугле направљене.



Слика 1



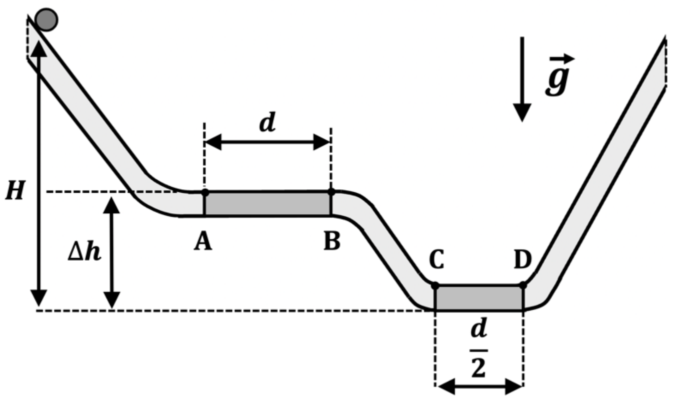
Слика 2

3. Куглица занемарљивих димензија пуштена је да се слободно креће, из стања мировања, са врха тобогана који се налази на висини $H = \frac{3}{2}d$, у односу на дно тобогана (слика 3). Трење између куглице и тобогана постоји само на хоризонталним дијеловима пута чије су дужине $|\mathrm{AB}| = d$ и $|\mathrm{CD}| = \frac{1}{2}d$, док одговарајући коефицијенти трења на тим дијеловима пута износе $\mu_{\mathrm{AB}} = 0{,}75$ и $\mu_{\mathrm{CD}} = 0{,}50$. Висинска разлика између хоризонталних дијелова тобогана износи $\Delta h = \frac{1}{2}d$. Одредите на ком растојању (L) од тачке D ће се куглица коначно зауставити. Претпоставите да је куглица током кретања све вријеме у контакту са подлогом.

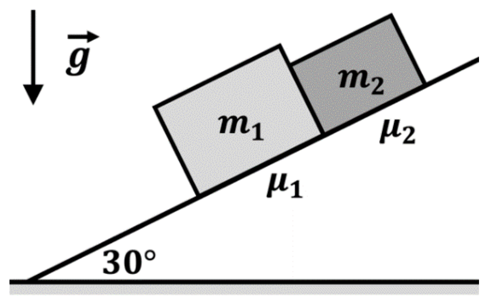
4. На непокретној стрмој равни, нагибног угла $\alpha = 30°$, налазе се два тијела маса $m_1 = 1{,}75$ kg и $m_2 = 1{,}25$ kg. Тијела су на почетку постављена на стрму раван тако да се сусједним и паралелним странама додирују, а потом су пуштена да се слободно крећу (слика 4). Коефицијент трења између првог тијела и стрме равни износи $\mu_1 = 0{,}2$, а између другог тијела и стрме равни је $\mu_2 = 0{,}4$. Разлика у вриједностима коефицијента трења између тијела и стрме равни постоји јер су тијела направљена од различитих материјала.

(а) Одредите интензитете убрзања тијела маса m_1 и m_2 у односу на непокретну стрму раван.

(б) Одредите интензитет убрзања датих тијела у односу на непокретну стрму раван, као и интензитет силе међусобне интеракције између тијела у току кретања, ако им приликом постављања на стрму раван замијенимо мјеста, а затим их пустимо да се слободно крећу.



Слика 3



Слика 4

5. У топлотно изолованом бакарном суду, чија је маса $M = 1$ kg, налази се $V = 2{,}5\ \ell$ воде чија температура износи $t_V = 70$ °C. Мали комад бакра, масе $m_B = 450$ g и температуре $t_B = 232$ °C, убачен је у суд са водом, због чега долази до загријавања суда и воде у њему. Специфични топлотни капацитет воде је $c_V = 4200 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg°C}}$, а бакра $c_B = 380 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg°C}}$. Густина воде износи $\rho_V = 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

(а) Одредите температуру система (t_r) након успостављања топлотне равнотеже.

(б) Како би се температура система снизила до вриједности $t = 52{,}5$ °C, у суд је брзо убачена извјесна количина леда на температури $t_L = -20$ °C. Израчунајте масу тог леда (m_L), ако његов специфични топлотни капацитет износи $c_L = 2100 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg°C}}$. Специфична топлота топљења леда је $\lambda_L = 330\,000 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$.

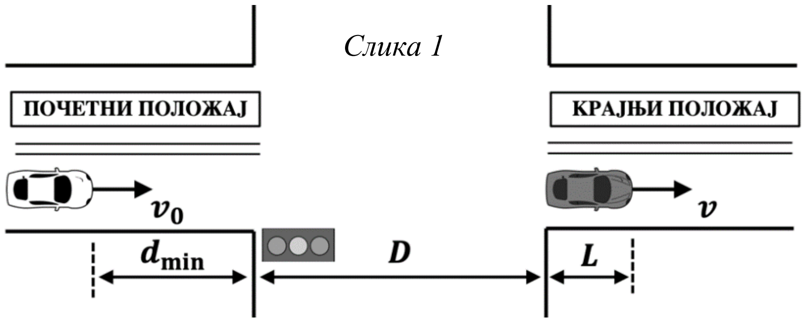
У свим задацима, гдје је потребно, узети да је гравитационо убрзање $g = 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Желимо вам много успјеха у раду!

Задатке припремила: *Јелена Милановић*, проф.
Рецензенти: Академик, проф. др *Јован Шетрајчић* и *Страхиња Максимовић*, проф.

1. $v_0 = 45\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\Delta t = 3{,}8$ s, $t_r = 1{,}2$ s, $a = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $D = 15$ m, $L = 4{,}15$ m, $d_{\min} = ?$, $a_{\min} = ?$, $v = ?$

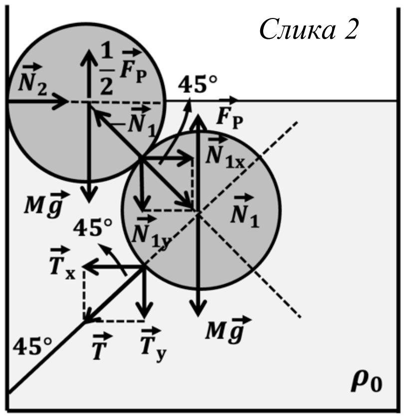
(а) Од тренутка када возач угледа жуто свјетло на семафору до тренутка када притисне кочницу, аутомобил прелази растојање $s_1 = v_0 t_r$ (1). С друге стране, зауставни пут при кочењу је $s_2 = \frac{v_0^2}{2a}$ (2). Тражено минимално растојање од почетка раскрснице износи $d = s_1 + s_2$ (3). Замјеном израза (1) и (2) у релацију (3) добијамо: $d_{\min} = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a}$, а након замјене бројних вриједности $d_{\min} = 46{,}25$ m (4).



(б) Да би изашао из раскрснице, укупан пут који треба да пређе аутомобил износи $s = d + L + D$ (5). Исти овај пут дат је и као $s = s_1 + s_3$ (6), гдје је $s_1 = v_0 t_r$ пређени пут аутомобила за вријеме које је потребно да возач одреагује на свјетлосни сигнал, а пут $s_3 = v_0(\Delta t - t_r) + \frac{1}{2}a_{\min}(\Delta t - t_r)^2$ (7) укупан пређени пут при равномјерно убрзаном кретању аутомобила. Изједначавањем израза (5) и (6), те на основу (1), (4) и (7) добијамо тражено минимално убрзање: $a_{\min} = \frac{2[d_{\min} + L + D - v_0 \Delta t]}{(\Delta t - t_r)^2}$, односно $a_{\min} = 5{,}30\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (8).

(в) Тражена брзина аутомобила у тренутку изласка из раскрснице је $v = v_0 + a_{\min}(\Delta t - t_r)$, одакле се на основу (8) коначно добија: $v = 26{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2. $\alpha = 45°$, $\rho_0 = 1260\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\rho = ?$



Услов равнотеже горгње кугле по вертикали је $Mg = \frac{1}{2}F_P + \frac{\sqrt{2}}{2}N_1$ (1), гдје је M маса кугле, F_P интензитет силе потиска, а N_1 интензитет нормалне силе којом једна кугла дјелује на другу, у тачки додира. Услов равнотеже доње кугле по вертикали је $F_P = Mg + \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}T$ (2), док је за хоризонтални правац испуњено $\frac{\sqrt{2}}{2}N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}T$ (3). На основу једначине (1) добијамо да је $N_1 = \sqrt{2}\left(Mg - \frac{1}{2}F_P\right)$ (4). Замјеном израза (4) у једначину (2) и на основу (3) можемо одредити везу између интензитета силе потиска и тежине једне кугле: $\frac{F_P}{Mg} = \frac{3}{2}$ (5). Маса кугле је дата изразом $M = \rho V$ (6), док за силу потиска важи $F_P = \rho_0 V g$ (7).

Коначно, замјеном израза (6) и (7) у добијени однос (5) добија се да је густина материјала од ког су кугле направљене дата изразом $\rho = \frac{2}{3}\rho_0$ и износи $\rho = 840\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

<u>*Напомена*</u>: Као што се може и примијетити, услов равнотеже горње кугле дуж хоризонталног правца није неопходно разматрати да би се ријешио задатак, па исти не доноси поене.

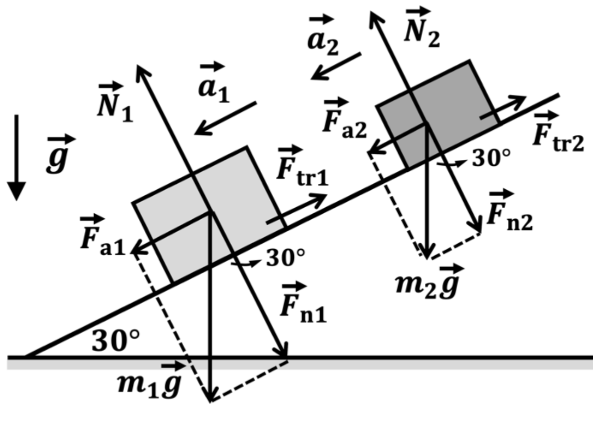
3. $H=\frac{3}{2}d$, $|\mathrm{AB}|=d$, $|\mathrm{CD}|=\frac{1}{2}d$, $\mu_{\mathrm{AB}}=0{,}75$, $\mu_{\mathrm{CD}}=0{,}50$, $\Delta h=\frac{1}{2}d$, $L=?$

У почетном положају, укупна механичка енергија куглице је $E_0=\frac{3}{2}mgd$ (1). Рад силе трења на дијелу пута пута $\overline{\mathrm{AB}}$ дат је изразом $A_{tr}^{(\mathrm{AB})}=-\mu_{\mathrm{AB}}mgd$ (2), док за дио $\overline{\mathrm{CD}}$ вриједи $A_{tr}^{(\mathrm{CD})}=-\frac{1}{2}\mu_{\mathrm{CD}}mgd$ (3). Нека је укупна енергија куглице у тачки D означена са E_{D}. На основу закона о одржању енергије можемо писати сљедећу једнакост: $E_{\mathrm{D}}-E_0=A_{tr}^{(\mathrm{AB})}+A_{tr}^{(\mathrm{CD})}$ (4). Замјеном израза (1), (2) и (3) у релацију (4) једноставно се добија да је $E_{\mathrm{D}}=\frac{1}{2}mgd$ (5). Након првог проласка хоризонталног дијела тобогана означеног са $|\mathrm{CD}|=\frac{1}{2}d$, куглица ће се попети на висину $\Delta h=\frac{1}{2}d$, затим без губитка енергије вратити у тачку D, а усљед дјеловања силе трења након још једног преласка дуж дијела пута $\overline{\mathrm{CD}}$ енергија ће јој се смањити за $\Delta E=\frac{1}{4}mgd$ (6). Ово значи да куглица више неће моћи да стигне до хоризонталног дијела тобогана $\overline{\mathrm{AB}}$, него се враћа у тачку C, гдје усљед трења на дијелу пута $\overline{\mathrm{CD}}$ губи сву преосталу енергију која, на основу (5) и (6), износи: $E_{\mathrm{D}}-\Delta E=\frac{1}{4}mgd=-A_{tr}^{(\mathrm{CD})}$. Дакле, куглица се зауставља се у тачки D, па је тражено растојање од те тачке једнако $L=0$.

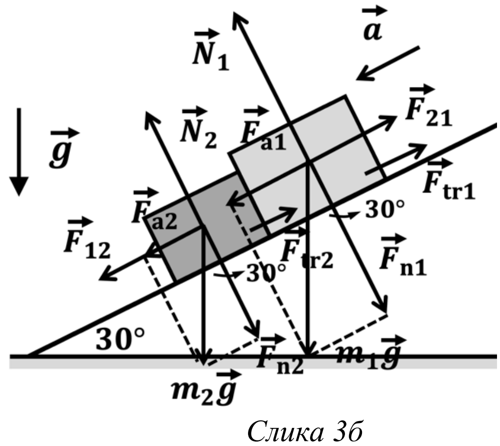
4. $m_1=1{,}75\ \mathrm{kg}$, $m_2=1{,}25\ \mathrm{kg}$, $\mu_1=0{,}2$, $\mu_2=0{,}4$, $a_1=?$, $a_2=?$, $a=?$, $F_{12}=?$

(а) Једначина кретања првог тијела на стрмој равни је $m_1a_1=\frac{1}{2}m_1g-F_{\mathrm{tr1}}$ (1), док за кретање другог тијела вриједи $m_2a_2=\frac{1}{2}m_2g-F_{\mathrm{tr2}}$ (2). Интензитет силе трења дат је као $F_{\mathrm{tr1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_1m_1g$ (3), за прво тијело, односно као $F_{\mathrm{tr2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_2m_2g$ (4), за друго тијело. Замјеном израза (3) и (4) у једначине кретања (1) и (2), коначно добијамо: $a_1=\frac{g}{2}\left(1-\mu_1\sqrt{3}\right)$ и $a_2=\frac{g}{2}\left(1-\mu_2\sqrt{3}\right)$, а након уврштавања бројних вриједности $a_1=3{,}20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ и $a_2=1{,}50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

(б) Када тијела замјене мјеста, тијело масе m_1 биће у сталном контакту са тијелом масе m_2. Прво тијело на друго дјеловаће силом интензитета F_{12}, док ће истовремено друго дјеловати на прво силом интензитета F_{21}. Према III Њутновом закону, слиједи да је $F_{12}=F_{21}$ (5). Једначине кретања тијела на стрмој равни у овом случају гласе: $m_1a=\frac{1}{2}m_1g-\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_1m_1g-F_{21}$ (6) и $m_2a=\frac{1}{2}m_2g-\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_2m_2g+F_{12}$ (7). Сабирањем једначина (6) и (7) и узимањем (5) у обзир, добија се: $a=\frac{g}{2}\left(1-\sqrt{3}\frac{\mu_1m_1+\mu_2m_2}{m_1+m_2}\right)$, или израчунавањем $a=2{,}50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (8). Замјеном резултата (8) у једначину (6) добијамо: $F_{12}=1{,}24\ \mathrm{N}$.



Слика 3а



Слика 3б

5. $M = 1\ \mathrm{kg}$, $V = 2{,}50\ \ell = 0{,}0025\ \mathrm{m}^3$, $t_\mathrm{V} = 70\ ^\circ\mathrm{C}$, $m_\mathrm{B} = 450\ \mathrm{g} = 0{,}45\ \mathrm{kg}$, $t_\mathrm{B} = 232\ ^\circ\mathrm{C}$, $c_\mathrm{V} = 4200\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$, $c_\mathrm{B} = 380\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$, $\rho_\mathrm{V} = 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $t = 52{,}5\ ^\circ\mathrm{C}$, $t_\mathrm{L} = -20\ ^\circ\mathrm{C}$, $c_\mathrm{L} = 2100\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$, $\lambda_\mathrm{L} = 330\ 000\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$, $t_\mathrm{r} = ?$, $m_\mathrm{L} = ?$

(а) Због постојања разлике у температури, топлије тијело предаје топлоту хладнијем. Количина топлоте коју отпусти комад бакра је $Q_1 = m_\mathrm{B} c_\mathrm{B}(t_\mathrm{B} - t_\mathrm{r})$ (1). Суд, а самим ти и вода у њему, загријавају се до равнотежне температуре, а потребна количина топлоте је $Q_2 = M c_\mathrm{B}(t_\mathrm{r} - t_\mathrm{V}) + m_\mathrm{V} c_\mathrm{V}(t_\mathrm{r} - t_\mathrm{V})$ (2). Маса воде може се добити из $m_\mathrm{V} = \rho_\mathrm{V} V = 2{,}5\ \mathrm{kg}$ (3), а како је суд топлотно изолован, вриједиће и једнакост $Q_1 = Q_2$ (4). Замјеном израза (1), (2) и (3) у једнакост (4) добијамо да је равнотежна температура система: $t_\mathrm{r} = \frac{t_\mathrm{V}(m_\mathrm{V} c_\mathrm{V} + M c_\mathrm{B}) + m_\mathrm{B} c_\mathrm{B} t_\mathrm{B}}{m_\mathrm{V} c_\mathrm{V} + (M + m_\mathrm{B}) c_\mathrm{B}}$ или $t_\mathrm{r} = 72{,}5\ ^\circ\mathrm{C}$ (5).

(б) Лед је, најприје, потребно загријати до температуре $t_0 = 0\ ^\circ\mathrm{C}$, затим истопити, а потом воду добијену топљењем загријати до дате температуре система. Укупна количина топлоте коју је потребно предати леду дата је изразом $Q_3 = m_\mathrm{L} c_\mathrm{L}(t_0 - t_\mathrm{L}) + m_\mathrm{L}\lambda_\mathrm{L} + m_\mathrm{L} c_\mathrm{V}(t - t_0)$ (6). Поред тога, сада систем отпушта топлоту, а одговарајућа количина топлоте износи $Q_4 = [m_\mathrm{V} c_\mathrm{V} + (M + m_\mathrm{B}) c_\mathrm{B}](t_\mathrm{r} - t)$ (7). Такође, из услова задатке поново важи $Q_3 = Q_4$ (8). Замјеном израза (3), (6) и (7) у једнакост (8) добијамо да је тражена маса леда која је убачена у суд: $m_\mathrm{L} = \frac{[m_\mathrm{V} c_\mathrm{V} + (M + m_\mathrm{B}) c_\mathrm{B}](t_\mathrm{r} - t)}{c_\mathrm{V} t + \lambda_\mathrm{L} - c_\mathrm{L} t_\mathrm{L}}$ односно $m_\mathrm{L} = 370\ \mathrm{g}$.