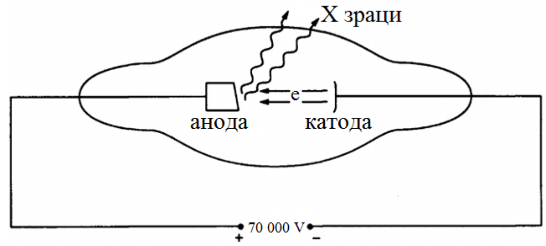
31. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (5. април 2025)

IV РАЗРЕД

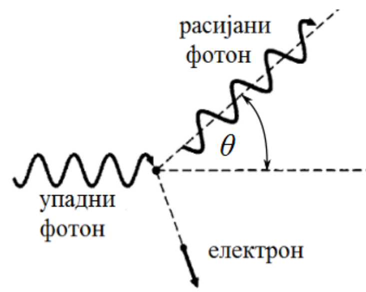
1. На *слици 1* приказана је рендгенска цијев. Успостављањем напона од $70000\,\mathrm{V}$ електрони се убрзавају од катоде ка аноди и при њиховом судару са анодом генеришу се рендгенски (X) зраци. Одредити:



(а) максималну фреквенцију рендгенских зрака које производи цијев.
слика 1

(б) максимални импулс рендгенских фотона које производи цијев.

Рендгенски фотон максималне енергије, којег производи цијев са *слике 1*, напушта цијев и еластично се расије на електрону у мировању. При томе, као што је приказано на *слици 2*, електрон добија одређен узмак. Фреквенција фотона након расијања износи $1{,}64 \cdot 10^{19}$ Hz. Одредити:



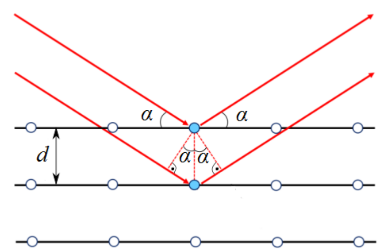
(в) импулс расијаног фотона.

(г) кинетичку енергију узмакнутог електрона.

(д) угао θ под којим се расијао фотон.

слика 2

Једна од метода за испитивање кристалних структура заснована је на дифракцији X зрака. На *слици 3* приказан је дио кристала, чије су двије сусједне равни размакнуте за d. Усмјерен сноп X зрака максималне фреквенције, добијен из цијеви са *слике 1*, пада на кристалне равни под углом $\alpha = 30°$, као на *слици 3*, и рефлектује се од атома из двије сусједне равни. При томе се опажа максимум првог реда настао конструктивном интерференцијом рефлектованих зрака.

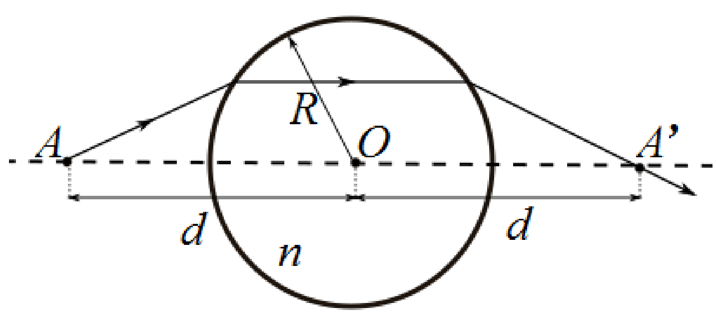


(ђ) Одредити растојање d између сусједних кристалних равни.

слика 3

Дате константе: брзина свјетлости $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Планкова константа $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$Js, Комптонова таласна дужина $\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 2{,}42$ pm, елементарно наелектрисање $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

2. Из тачке A усмјерава се ласерски зрак на стаклену куглу полупречника кривине R и апсолутног индекса преламања $n = 3/2$, као што је приказано на *слици 4*. Колики је упадни угао зрака на куглу ако зрак пролази кроз куглу паралелно са правом на којој се налазе тачке A и центар кугле O, а напушта је по правцу који пролази кроз тачку A', при чему вриједи $\overline{AO} = \overline{OA}' = d = 2R$? Кугла се налази у ваздушном окружењу апсолутног индекса преламања $n_v = 1$.

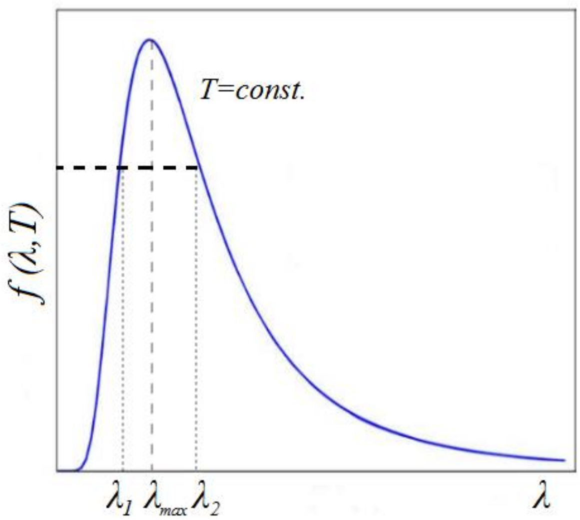


слика 4

3. (а) Према Планковом закону зрачења црног тијела важи:

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

гдје су: $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ - брзина свјетлости, $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$ - Планкова константа, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ - Болцманова константа. На *слици 5* је приказан спектар звијезде чије зрачење одговара зрачењу црног тијела, при чему важи $\lambda_2 = 2\lambda_1$. Таласна дужина на којој звијезда максимално зрачи је за $\Delta\lambda = 160\ \mathrm{nm}$ већа од λ_1. Одредити таласну дужину на којој звијезда максимално зрачи, као и температуру површине звијезде.

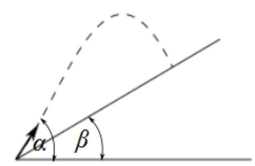


За Винову константу користити вриједност $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K \cdot m}$.

слика 5

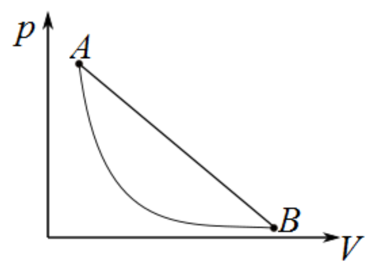
(б) Ако свјетлост таласне дужине на којој звијезда из дијела (а) максимално зрачи пада окомито на дифракциону решетку константе $d = 1{,}74\ \mu\mathrm{m}$, израчунати укупан број дифракционих максимума које даје решетка.

4. Топ се налази у подножју брда и испаљује гранату тако да она при удару у падину брда чини прав угао са површином (видјети *слику 6*). Ако је угао нагиба брда β, колики је елевациони угао α при испаљивању гранате? Отпор ваздуха занемарити.



слика 6

5. Идеалан једноатомни гас пролази кроз термодинамички процес приказан на *слици 7*. Почетно стање система је стање A. Из стања A систем прелази у стање B експанзијом која је у $p - V$ дијаграму представљена линеарном правом. Затим, систем из стања B пролази кроз адијабатску компресију, враћајући се у почетно стање A. У стању A су познати притисак гаса $p_A = 3{,}36\ \mathrm{kPa}$ и запремина гаса $V_A = 3\ \mathrm{dm}^3$, док је у стању B позната запремина гаса $V_B = 24\ \mathrm{dm}^3$. Одредити:



слика 7

(а) притисак гаса p_B у стању B.

(б) вриједности коефицијената a и b за линеарну једначину праве $p = aV + b$, која описује процес од A до B.

(в) однос температура гаса T_A/T_B у стањима A и B.

(г) коефицијент корисног дејства Карноовог циклуса, при чему су максимална и минимална температура у циклусу управо температуре T_A и T_B из дијела (в).

Задатке припремио: *мр Бојан Ковачевић, ПМФ Бања Лука*

Рецензент: *проф. др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад*

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА IV РАЗРЕД

1.

(а) $\nu = \frac{eU}{h}$, $\nu = 1{,}69 \cdot 10^{19}$ Hz.

(б) $p = \frac{h\nu}{c}$, $p = 3{,}73 \cdot 10^{-23}$ kg$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

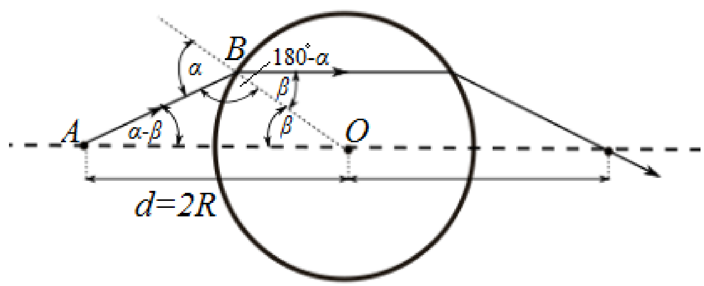
(в) $\nu' = 1.64 \cdot 10^{19}$ Hz, $p' = \frac{h\nu'}{c}$, $p' = 3{,}62 \cdot 10^{-23}$ kg$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(г) $h\nu + m_0c^2 = h\nu' + T_e + m_0c^2 \Rightarrow T_e = h\nu - h\nu'$, $T_e = 3{,}31 \cdot 10^{-16}$J.

(д) На основу (1) $\lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ или (2) $\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$ добија се $\theta \approx 39°$. Једначину (1) или (2) бодовати са.

(ђ) $\Delta s = 2d\sin\alpha$, $\Delta s = k\lambda \Rightarrow 2d\sin\alpha = k\lambda\ (k = 1)$, $d = \lambda$, $d = \frac{c}{\nu} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-11}$m.

2.



Ласерски зрак се у тачки B прелама на сферној површи. Са α је обиљежен упадни, а са β преломни угао зрака, те вриједи

(1) $n_v \sin\alpha = n\sin\beta$

(2) $\sin\alpha = n\sin\beta$,

(3) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Додијелити ако је наведена нека од једначина (1), (2) или (3).

За сваки правилно означен угао у троуглу AOB додијелити по (1 б), тј. β, $180° - \alpha$ и $\alpha - \beta$.

Обиљежимо са s дужину дужи $\overline{AB}$. Примјеном синусне теореме на троугао AOB добија се

$$\frac{s}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin(180° - \alpha)},$$

$$\frac{s}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin\alpha},$$

$s = d\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, те замјеном (3) у израз за s слиједи да је $s = \frac{d}{n}$ (*), $s = \frac{2R}{n}$ (**). За израз (*) или (**) додијелити.

Примјеном косинусне теореме на троугао AOB добија се

$$d^2 = s^2 + R^2 - 2sR\cos(180° - \alpha).$$

Замјеном $d = 2R$ и $s = \frac{2R}{n}$ у претходну једначину слиједи да је

$$4R^2 = \frac{4R^2}{n^2} + R^2 - \frac{4R^2}{n}\cos(180° - \alpha),$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{1}{n} - \frac{3n}{4}, \alpha = 62{,}7°.$$

3.

(a) Са слике приложене уз задатак се уочава да је

$$f(\lambda_1, T) = f(\lambda_2, T), \text{ те слиједи}$$

$$\frac{2\pi hc^2}{{\lambda_1}^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT}}-1} = \frac{2\pi hc^2}{{\lambda_2}^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_2 kT}}-1},$$

$$\frac{1}{{\lambda_1}^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT}} - 1} = \frac{1}{(2\lambda_1)^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{2\lambda_1 kT}} - 1},$$

$$32\left(e^{\frac{hc}{2\lambda_1 kT}} - 1\right) = e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT}} - 1,$$

$$e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT}} - 32\, e^{\frac{hc}{2\lambda_1 kT}} + 31 = 0,$$

Увођењем смјене $e^{\frac{hc}{2\lambda_1 kT}} = x$, добија се квадратна једначина

$$x^2 - 32\,x + 31 = 0,$$

чија су рјешења $x^{(1)} = 1$ и $x^{(2)} = 31$. Како само рјешење $x = 31$ има физички смисао слиједи да је

$$e^{\frac{hc}{2\lambda_1 kT}} = 31,$$

$$\frac{hc}{2\lambda_1 kT} = \ln(31).$$

На основу услова $\lambda_1 = \lambda_{max} - \Delta\lambda$ и Виновог закона помијерања $T = \frac{b}{\lambda_{max}}$ добија се

$$\frac{hc\lambda_{max}}{2kb(\lambda_{max} - \Delta\lambda)} = \ln(31),$$

$$\lambda_{max} = \frac{2kb\ln(31)}{2kb\ln(31) - hc}\Delta\lambda,$$

$$\lambda_{max} = 578{,}1 \text{ nm},$$

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}} \Longrightarrow T = 5016{,}4 \text{ K}.$$

(б)

$$d \sin\theta = k\lambda \text{ , гдје је } \lambda = \lambda_{max} = 578{,}1 \text{ nm.}$$

Из $\frac{k\lambda}{d} \leq 1$ слиједи $k \leq \frac{d}{\lambda} \Longrightarrow k_{max} = 3$. Укупан број дифракционих максимума је $N = 2k_{max} + 1$, $N = 7$.

4. I начин

Једначине кретања гранате су $x = v_0 t \cos\alpha$ и $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$. Из једначина кретања гранате слиједи да је једначина путање гранате $y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha}$.

Судар гранате са падином се догађа у тачки A, која представља пресјечну тачку путање гранате коју описује једначина $y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha}$ са падином брда коју описује једначина $y = x \operatorname{tg}\beta$.

Из претходне двије једначине слиједи

$$x \operatorname{tg}\beta = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha},$$

$$\frac{gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} + x(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) = 0,$$

$$x\left(\frac{gx}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\right) = 0,$$

те коодинату x тачке A представља $x_A = \frac{2{v_0}^2 \cos^2\alpha}{g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$, док $x = 0$ одговара пресјеку једначине путање и једначине падине у координатном почетку из ког се граната испаљује.

Из услова задатка тангента на путању гранате у тачки A и права која описује падину требају бити међусобно нормалне, а то значи да њихови коефицијенти правца требају задовољавати услов нормалности $k_1 \cdot k_2 = -1$.

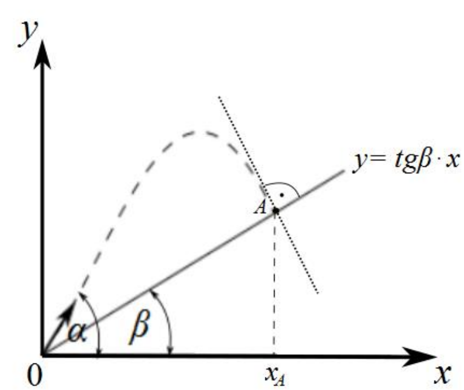
Коефицијент правца праве која описује падину је $k_1 = \operatorname{tg}\beta$.

Коефицијент правца тангенте на путању гранате у тачки A представља први извод једначине путање гранате $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{{v_0}^2 \cos^2\alpha}$ у x_A тј.

$$k_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_A},$$

$$k_2 = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\alpha} \frac{2{v_0}^2 \cos^2\alpha}{g}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta),$$

$$k_2 = 2\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha.$$



Уврштавањем израза $k_1 = \operatorname{tg}\beta$ и $k_2 = 2\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$ у услов нормалности $k_1 \cdot k_2 = -1$ добија се $\operatorname{tg}\beta(2\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) = -1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)$.

II начин

Једначине кретања гранате су

$$(1)\ \ x = v_0\, t \cos\alpha,$$

$$(2)\ \ y = v_0\, t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Хоризонтална и вертикална компонента брзине гранате су дате са

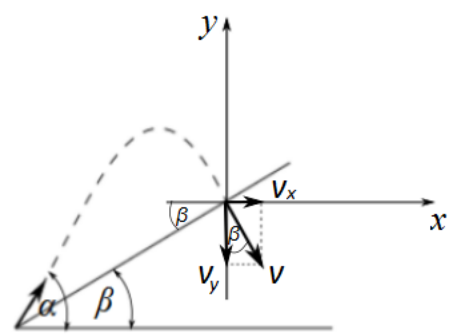
$$(3)\ \ v_x = v_0 \cos\alpha,$$

$$(4)\ \ v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Према поставци координатног система (видјети слику) са почетком у тачки удара гранате у падину, компоненте брзине v при удару у падину су

$$(5)\ \ v_x = v \sin\beta,$$

$$(6)\ \ v_y = -v \cos\beta\ .$$



Како је кретање дуж хоризонталног правца равномјерно, на основу (3) и (5) слиједи да је

$$(7)\ v = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sin\beta}\,.$$

На основу (1) и (6) једначина (4) добија форму

$$(8)\ \ -v \cos\beta = v_0 \sin\alpha - \frac{gx}{v_0\ \cos\alpha}\,.$$

Замјеном (7) у једначину (8) слиједи да је

$$(9)\ \frac{gx}{{v_0}^2} = \cos\alpha\,(\sin\alpha + \cos\alpha\ \operatorname{ctg}\beta)\,.$$

На основу (1) и (2) једначина путање гранате је

$$(10)\ \ y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha}\,.$$

Замјеном $y = x \operatorname{tg}\beta$ и (9) у (10) добија се

$$\alpha = \operatorname{arctg}\,(2\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta).$$

5.

(а) Како стање A и стање B припадају истој адијабати, вриједи $p_A {V_A}^{\gamma} = p_B {V_B}^{\gamma}$.

За једноатомни гас је $j = 3$, па адијабатска константа $\gamma = \frac{j+2}{j}$ је $\gamma = \frac{5}{3}$. Дакле, притисак гаса у стању B је $p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma}$, $p_B = 0{,}105$ kPa .

(б) На основу једначине праве кроз тачке (V_A, p_A) и (V_B, p_B) је

$$p - p_A = \frac{p_B - p_A}{V_B - V_A}(V - V_A),$$

$$p = \frac{p_B - p_A}{V_B - V_A}\, V + \frac{p_A V_B - p_B V_A}{V_B - V_A},$$

$a = \frac{p_B - p_A}{V_B - V_A}$, $b = \frac{p_A V_B - p_B V_A}{V_B - V_A}$.

Замјеном бројних вриједности добија се $a = -0{,}155\ \frac{\mathrm{kPa}}{\mathrm{dm^3}}$ и $b = 3{,}825$ kPa.

(в) На основу једначине $T_A {V_A}^{\gamma-1} = T_B {V_B}^{\gamma-1}$ (*) или једначине $T_A {p_A}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_B {p_B}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ (**) добија се $\frac{T_A}{T_B} = 4$. За једначину (*) или једначину (**) додијелити.

(г) $\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A}$, $\eta = 0{,}75$.