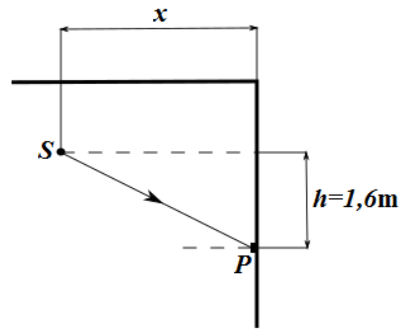
28. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (30. април 2022)

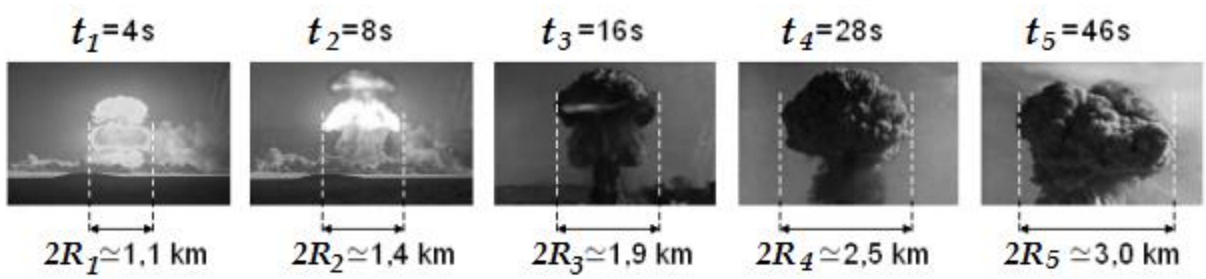
IV РАЗРЕД

1. На зиду собе постављен је тачкасти предмет P тако да је 1,6m испод сијалице S. На ком растојању x од зида треба поставити сијалицу тако да предмет буде максимално освијетљен? Сматрати да је сијалица изотропан свјетлосни извор.



2. Око средине XX вијека количина енергије ослобођена експлозијом атомске бомбе била је повјерљива информација. Слике снимљене 1945. године током експлозије прве атомске бомбе у ваздуху постале су јавне 1947. године. Анализом слика енглески физичар *Geoffrey I. Taylor* процијенио је количину енергије ослобођене експлозијом, те је 1950. године објавио два чланка са резултатима ове процјене. *Taylor* је претпоставио да полупречник R радиоактивног облака, који се појављује као резултат детонације атомске бомбе у ваздуху, зависи од времена t протеклог од тренутка експлозије, ослобођене енергије E и густине ваздуха ρ око радиоактивног облака. Димензионалном анализом зависност ових података може се приказати законом $R = Ct^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}$, гдје је C бездимензионални коефицијент за чију ћемо вриједност узети да је $C = 1$.

Сет слика приказаних испод приказује радиоактивни облак који потиче од експлозије атомске бомбе која се догодила 1953. године.



а) Изврши линеаризацију закона $R = t^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}$, односно представи га у форми $y = kx + n$.

б) Графички прикажите линеарну форму закона из а) користећи податке са сета слика из 1953. године, те процијените количину енергије ослобођене у експлозији атомске бомбе из 1953. године. Густина ваздуха око радиоактивног облака има вриједност $\rho = 1.3\,\frac{kg}{m^3}$

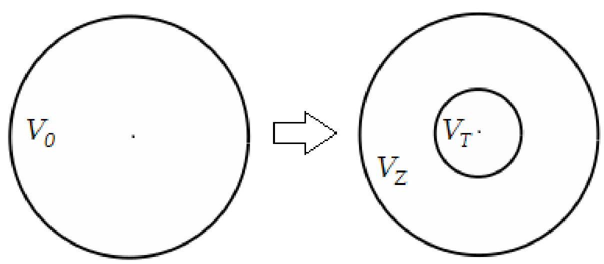
3. Код атома водоника при прелазу $n+2 \to n+1$ ослободи се фотон таласне дужине λ_2, док при прелазу $n+1 \to n$ долази до ослобађања фотона таласне дужине λ_1. Одредити о

којим серијама се ради и колике су таласне дужине емитованих фотона ако је однос таласних дужина емитованих фотона $\frac{27}{5}$. Ридбергова константа износи $R = 1{,}097 \cdot 10^7\,\frac{1}{\mathrm{m}}$.

4. а) Раст тумора је веома сложен процес у коме се биолошки механизми преплићу са физиком. У овом задатку ћемо размотрити поједностављен модел раста тумора. Претпоставићемо да група здравих ћелија формира ткиво окружено нерастегљивом базалном мембраном која га приморава да одржава увијек исти облик (облик лопте запремине V_0). Густина оваквог ткива је ρ_0. У свакој тачки ткива, прије појаве тумора, притисак је једнак атмосферском. Од тренутка када тумор крене да расте из центра ткива притисак почиње да се повећава унутар ткива, док се укупна маса здравих ћелија не мијења. Уз претпоставку да су и здраво ткиво и тумор стишљиви, закони пораста њихових густина са промјеном притиска су респективно дати са

$$\rho_Z = \rho_0\left(1 + \frac{p}{K_Z}\right), \qquad \rho_T = \rho_0\left(1 + \frac{p}{K_T}\right),$$

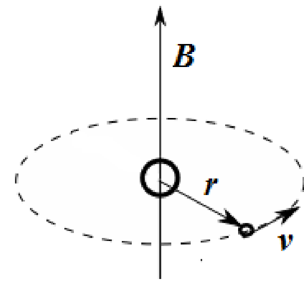
гдје су K_Z и K_T модули стишљивости здравог ткива и тумора респективно, а p је промјена притиска у односу на атмосферски.



Наћи однос запремина $v = \frac{V_T}{V_0}$ као функцију односа $\mu = \frac{M_T}{M_z}$, $\kappa = \frac{K_Z}{K_T}$. Маса M_z је маса здравог ткива, док је M_T маса тумора.

б) Хипертермија се понекад користи заједно са хемотерапијом и радиотерапијом у лијечењу карцинома. Хипертермијом се карциномске ћелије селективно загријавају од нормалне тјелесне температуре човјека 37 ℃ до температуре која износи најмање 43 ℃, када карциномске ћелије почињу да изумиру. Истраживачи развијају угљеничне нанотубе прекривене посебним протеинима способним да се вежу за ћелије тумора. Када се ткиво озрачи инфрацрвеним зрачењем, нанотубе га апсорбују у много већој мјери него околно ткиво и стога се могу селективно загријавати као и туморске ћелије за које су прикачене. Колику количину топлоте треба предати сферном тумору коначног радијуса 2 cm који се налази на нормалној тјелесној температури човјека да би тумор кренуо да изумире? Густина таквог тумора износи $1050\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, док је његов специфични топлотни капацитет $3700\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$.

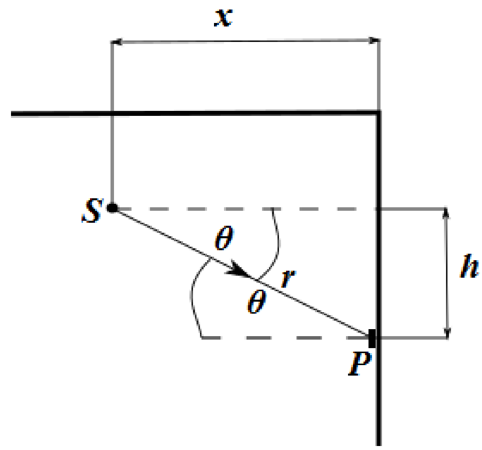
5. а) Електрон масе m креће се око језгра чије је наелектрисање $+e$ по кружној путањи полупречника r. Одредити израз за кружну фреквенцију ω_0 електрона око језгра. Диелектрична константа вакуума је ε_0.



б) Одредити израз за резултујућу угаону фреквенцију ω електрона око језгра атома која је измијењена у односу на ω_0 због присуства придодатог магнетног поља индукције B које је нормално на раван орбите електрона и усмјерено као на слици. Резултат за ω изрази преко фреквенције ω_0 из а) и Ларморове фреквенције $\omega_L = \frac{eB}{2m}$ уз услов да је $\omega_0 \gg \omega_L$.

Задатке припремио: Бојан Ковачевић, ПМФ Бања Лука
Рецензенти: проф.др Синиша Игњатовић, ПМФ Бања Лука
проф.др Душанка Марчетић, ПМФ Бања Лука

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА IV РАЗРЕД



1. Освијетљеност предмета је $E = \frac{I}{r^2}\cos\theta$, гдје је r дужина дужи која повезује S и P.

Како је $\cos\theta = \frac{x}{r}$ и $r = \sqrt{x^2 + h^2} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$, па израз за освијетљеност се своди на $E = \frac{Ix}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$. На основу добијеног израза за освијетљеност може се закључити да она зависи само од једне промјенљиве величине (растојања x), под условом да су јачина свјетлосног извора I и висина h непромјенљиви. Када је $x = 0$ и за $x \to \infty$ освијетљеност предмета је једнака нули. Између ова два крајња положаја сијалице, освијетљеност има коначну вриједност. Да бисмо одредили растојање x_m за које освијетљеност има максмималну вриједност, неопходно је наћи први извод од E по x

$$\frac{dE}{dx} = \frac{I(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - Ix\frac{3}{2}(x^2+h^2)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+h^2)^3}.$$

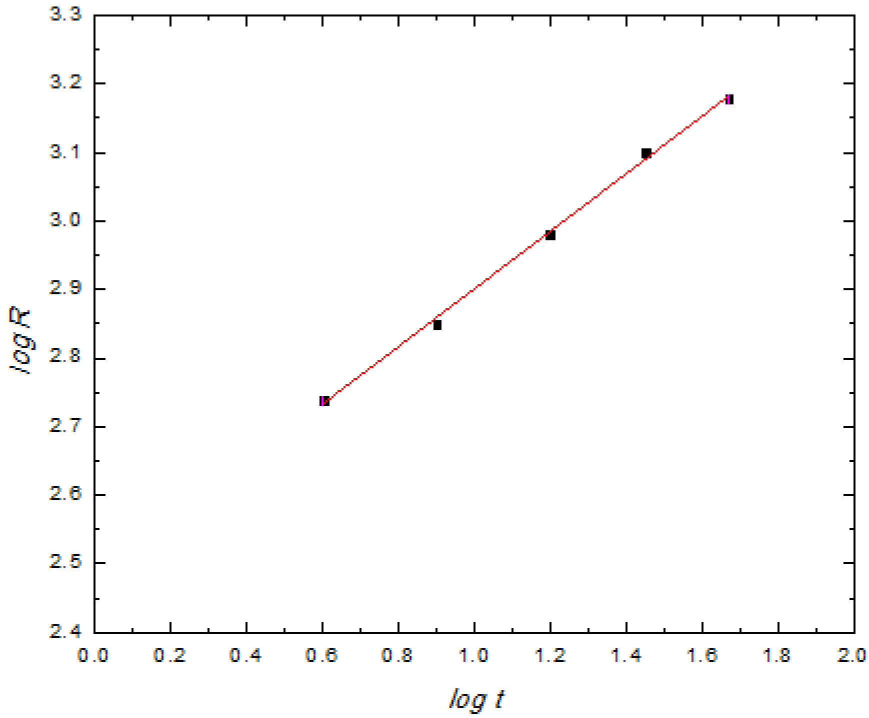
Када се први извод изједначи са нулом $\frac{dE}{dx} = 0$, рјешење једначине даје ону вриједност x за коју функција $E(x)$ има екстремну вриједност $\Longrightarrow x_m = \frac{h}{\sqrt{2}}$, $x_m = 1{,}13$ m.

2. а) $log\, R = \frac{2}{5} log\, t + \frac{1}{5} log\frac{E}{\rho}$

$$y = kx + n, \text{ гдје је } \begin{cases} y = log\, R \\ x = log\, t \\ k = \frac{2}{5} \\ n = \frac{1}{5} log\frac{E}{\rho} \end{cases}$$

б)

$t(s)$	$R(m)$	$log\, t$	$log\, R$
4	550	0.60	2.74
8	700	0.90	2.85
16	950	1.20	2.98
28	1250	1.45	3.10
46	1500	1.67	3.18



Са графика $n \approx 2.48$. $n = \frac{1}{5} log \frac{E}{\rho} \Longrightarrow E \approx 3.9 \cdot 10^{12}$J.

3. Напишимо Ридбергову формулу за ове прелазе

$$\frac{1}{\lambda_1} = R\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right], \Longrightarrow \frac{1}{\lambda_1} = R\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = R\left[\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right], \Longrightarrow \frac{1}{\lambda_2} = R\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}.$$

Дијељењем претходних једначина и уврштавањем задатог односа $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{27}{5}$ и сређивањем једначине по степенима од n, добијамо кубну једначину $11n^3 + 9n^2 - 15n - 5 = 0$ коју можемо факторисати

$$(n-1)(11n^2 + 20n + 5) = 0.$$

Једно рјешење је $n = 1$, а преостала два рјешења као рјешења квадратне једначине су негативна и немају физичко значење с обзиром да је $n > 0$. Према томе прва серија је Лајманова(јер је прелаз на $n = 1$) , а друга је Балмерова (јер је прелаз на $n + 1 = 2$).

Уврштавањем $n = 1$ у једначине одређујемо таласне дужине главних линија у овим серијама $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{3}{4}R \Longrightarrow \lambda_1 \approx 121{,}5$ nm, $\frac{1}{\lambda_2} = \frac{5}{36}R \Longrightarrow \lambda_2 \approx 656{,}3$ nm.

4. а) $M_T = \rho_T V_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right) V_T$ (*)

$M_Z = \rho_Z V_Z = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_Z}\right)(V_0 - V_T)$ (**)

Уколико се из једначине (**) изрази промјена притиска $p = \frac{M_T K_T}{\rho_0 V_T} - K_T$ и уврсти у (*) добија се $M_Z = \rho_0 \left(1 + \frac{M_T K_T}{\rho_0 V_T K_Z} - \frac{K_T}{K_Z}\right)(V_0 - V_T)$ (***) . Како се укупна маса здравих ћелија не мијења $M_Z = M_0 = \rho_O V_0 \Longrightarrow \rho_O = \frac{M_Z}{V_0}$, те замјеном у (***) добија се $M_Z = \frac{M_Z}{V_0}\left(1 + \frac{M_T V_0 K_T}{M_Z V_T K_Z} - \frac{K_T}{K_Z}\right)(V_0 - V_T)$,

$$1 = \left(1 + \frac{M_T V_0 K_T}{M_Z V_T K_Z} - \frac{K_T}{K_Z}\right)\left(1 - \frac{V_T}{V_0}\right),$$
$$1 = \left(1 + \frac{\mu}{v\kappa} - \frac{1}{\kappa}\right)(1 - v),$$
$$v^2(1-\kappa) - v(1+\mu) + \mu = 0.$$

Рјешавањем квадратне једначине по v добијамо

$$v_1 = \frac{1+\mu+\sqrt{(1+\mu)^2 - 4\mu(1-\kappa)}}{2(1-\kappa)},\ v_2 = \frac{1+\mu-\sqrt{(1+\mu)^2 - 4\mu(1-\kappa)}}{2(1-\kappa)}.$$

Рјешење v_1 се одбацује јер вриједност $\mu = 0$ не води ка вриједности $v = 0$, те је тражена функционална зависност $v = \frac{1+\mu-\sqrt{(1+\mu)^2 - 4\mu(1-\kappa)}}{2(1-\kappa)}$.

б) $Q = mc\Delta T = \rho V c \Delta T$, $V = \frac{4}{3}R^3\pi$, $Q = 780.7$ J.

5. а) Како је Кулонова сила привлалења између електрона и језгра усмјерена ка центру кружнице једначина кретања електрона је $m{\omega_0}^2 r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$, $\Longrightarrow \omega_0 = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r^3}}$.

б) За смјер брзине електрона и смјер магнетне индукције са слике уз задатак Лоренцова сила је усмјерена ка центру кружнице, као и Кулонова сила привлачења између електрона и језгра, па је једначина кретања електрона: $m\omega^2 r = F_L + F_e$, $\Longrightarrow m\omega^2 r = evB + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$. Замјеном $v = \omega r$ једначина кретања електрона добија облик $\omega^2 - 2\omega_L\omega - {\omega_0}^2 = 0$. Рјешење квадратне једначине је $\omega = \omega_L \pm \sqrt{{\omega_0}^2 + {\omega_L}^2}$. Како је $\omega_0 \gg \omega_L$ занемарује се ω_L под коријеном, те је коначно рјешење $\omega = \omega_0 + \omega_L$.