28. РЕГИОНАЛНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (19. март 2022)

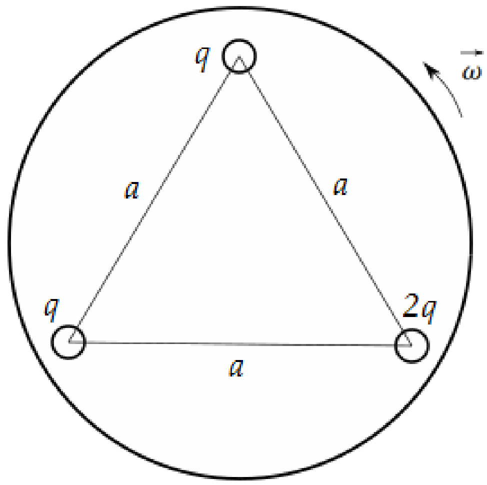
IV РАЗРЕД

1. Двоструко јонизиван атом литијума $\mathrm{Li}^{++}(Z_{\mathrm{Li}} = 3)$ емитује фотон при прелазу електрона из првог побуђеног стања у основно стање. Овим фотоном јонизује се једноструко јонизован атом хелијума $\mathrm{He}^{+}(Z_{He} = 2)$ који се налази у основном стању (енергија јонизације за ово стање хелијума дата је изразом $E_{jHe} = hRcZ_{He}^2$ гдје су $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}, R = 1.097 \cdot 10^7\mathrm{m},\ c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). Одредити брзину фотоелектрона који напушта атом хелијума.

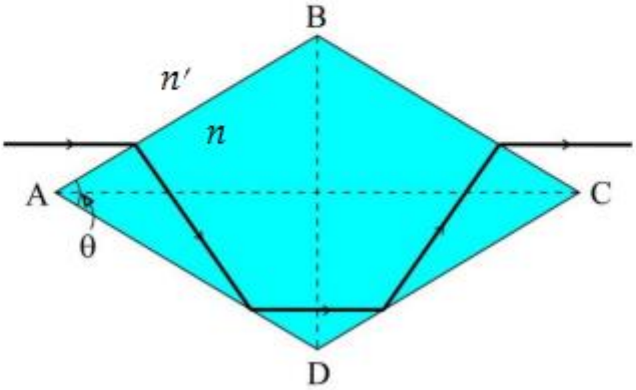
2. (а) Одредити квантни број n који одговара побуђеном стању јона $He^{+}(Z = 2)$ ако при прелазу из тог стања у основно јон емитује, један за другим, два фотона таласних дужина 108.5 nm и 30.4 nm.
(б) Одредити квантни број m нивоа преко ког се одвијала деексцитација.

3. При којој вриједности кинетичке енергије је де Брољева таласна дужина релативистичког електрона једнака његовој Комптоновој таласној дужини?

4. У тјеменима једнакостраничног троугла странице a, постављеног на платформу која може ротирати, фиксирана су два тачкаста наелектрисања $+q$ и једно тачкасто наелектрисање $+2q$, као што је то приказано на слици. Цијели систем се налази у вакууму.
(а) Одредите интензитет резултујуће електростатичке силе која дјелује на наелектрисање $+2q$.
(б) Одредите магнетну индукцију у центру троугла ако платформа ротира угаоном брзином ω, претпостављајући да је угаона брзина таква да се кретање наелектрисања може апроксимирати кретањем сталне струје кроз проводник.



5. Свјетлосни зрак креће се у равни пресјека призме који има облик ромба као на слици ($\measuredangle \mathrm{BAD} = \theta, \measuredangle \mathrm{BCD} = \theta$). Зрак упада на страницу AB паралелно дијагонали ромба, прелама се под оштрим углом у односу на нормалу странице AB, тотално се рефлектује на страници AD, пропагира паралелно дијагонали ромба AC, тотално се рефлектује на страници DC и излази на страници BC. Улазни и излазни зрак при томе задржавају исти правац. Стаклена призма индекса преламања $n = 1.60$ смјештена је у ваздушно окружење индекса преламања $n' = 1.00$. Извести математички израз за угао θ као функцију индекса преламања n призме $\theta = f(\mathrm{n})$ и израчунати бројну вриједност угла θ. Тригонометријски идентитет који може бити од помоћи при изналажењу рјешења је $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.



Задатке припремио: Бојан Ковачевић, ПМФ Бања Лука
Рецензент: Проф. др Душанка Марчетић, ПМФ Бања Лука

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА IV РАЗРЕД

1. Таласна дужина фотона који се емитује при прелазу електрона из првог побуђеног стања ($k = 2$) у основно стање ($n = 1$) јона Li^{++} одређена је са

$$\frac{1}{\lambda} = RZ_{Li}^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Брзина фотоелектрона који напушта атом хелијума одређује се из

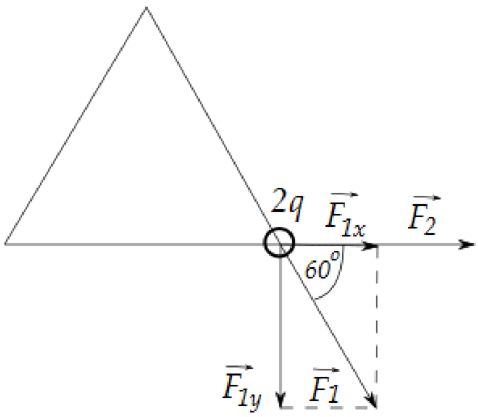
$$\frac{hc}{\lambda} = E_{jHe} + \frac{mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{\frac{2(\frac{hc}{\lambda} - E_{jHe})}{m}} = \sqrt{\frac{2hcR\left[Z_{Li}^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) - Z_{He}^2\right]}{m}} = 3.62 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2. (а) Примјеном Боровог постулата за прелаз $n \to 1$, у којем је укупна енергија емитованих фотона једнака $E_f = E_{f1} + E_{f2}$, добија се $E_n - E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} + \frac{hc}{\lambda_2}$.
Како је $E_n = \frac{E_1}{n^2}$, претходну једначину можемо написати као $\frac{E_1}{n^2} - E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} + \frac{hc}{\lambda_2}$ одакле рјешавањем по n долазимо до израза $n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{hc}{E_1}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\cdot\lambda_2}}}$. Уврштавањем задатих вриједности и енергије основног стања јона He^+, $E_1 = E_1(He^+) = Z^2E_1(H) = 4E_1(H) \approx -54{,}4$ eV, добијамо $n = 5$.
(б) Деекситација у основно стање дешава се преко нивоа m односно имамо прелазе $n \to m \to 1$. Због згушњавања енергијских нивоа прелазу $m \to 1$ одговара фотон веће енергије него прелазу $n \to m$. Примјеном Боровог постулата на прелаз $m \to 1$ имамо $E_m - E_1 = \frac{hc}{\lambda_2}$, што уз $E_m = \frac{E_1}{m^2}$ даје $m = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{hc}{E_1\lambda_2}}}$. Уз дате податке налазимо $m = 2$. Како видимо процес деексцитације се одвијао путем $5 \to 2 \to 1$.

3. Импулс релативистичке честице једнак је $p = \frac{1}{C}\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}$ гдје су T и m_0 кинетичка енергија и маса мировања релативистичке честице респективно. Из једнакости Де Бројеве таласне дужине је $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2m_0c^2)}}$ и Комптонове таласне дужине $\lambda_C = \frac{h}{m_0c}$ добија се квадратна једначина:
$T^2 + 2m_0c^2T - {m_0}^2c^4 = 0$ чије позитивно рјешење одговара вриједности тражене кинетичке енергије $T = (\sqrt{2} - 1)m_0c^2 \approx 0.21$ MeV .

4. (а) На наелектрисање $2q$ дјелују одбојне Кулонове силе $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ које су једнаке по интензитету $F_1 = F_2 = k\frac{q\cdot 2q}{a^2} = 2k\frac{q^2}{a^2}$. Да бисмо израчунали резултујућу силу, силу $\overrightarrow{F_1}$ разлажемо на компоненту $\overrightarrow{F_{1x}}$ која има исти правац као сила $\overrightarrow{F_2}$, и на компоненту која је окомита на силу $\overrightarrow{F_2}$. Интензитети компоненти су стога



$F_{1x} = 2k\frac{q^2}{a^2}\cos 60^\circ = 2k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2} = k\frac{q^2}{a^2}$, $F_{1y} = 2k\frac{q^2}{a^2}\sin 60^\circ = 2k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = k\sqrt{3}\frac{q^2}{a^2}$.

Интензите X-компоненте резултујуће силе је дата са:

$F_{Rx} = F_2 + F_{1x} = 2k\frac{q^2}{a^2} + k\frac{q^2}{a^2} = 3k\frac{q^2}{a^2}$.

Интензитет Y-компоненте резултујуће силе је дата са:

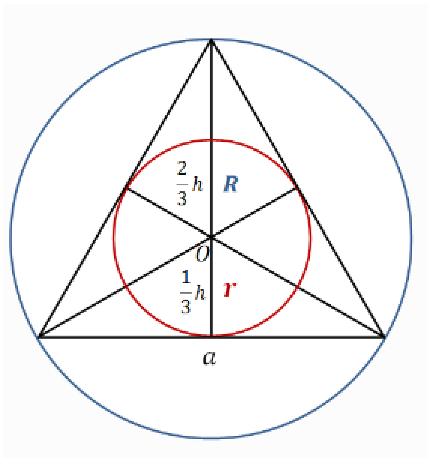
$F_{Ry} = F_{1y} = k\sqrt{3}\frac{q^2}{a^2}$.

Интензитет резултујуће силе је

$$F_R = \sqrt{{F_{Rx}}^2 + {F_{Ry}}^2} = \sqrt{9k^2\frac{q^4}{a^4} + 3k^2\frac{q^4}{a^4}} = 2\sqrt{3}k\frac{q^2}{a^2}.$$

Интензитет резултујуће силе може се добити и примјеном косинусне теореме.

(б) Кретање наелектрисања на тјеменима троугла који ротира можемо замислити као кружно кретање. Стога, магнетну индукцију у центру троугла можемо апроксимирати са магнетном индукцијом у центру кружног проводника радијуса $R = \frac{2}{3}h$, гдје је h висина троугла која је у вези са страницом једнакостраничног троугла преко израза $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, тако да је $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Магнетна индукција у центру кружног проводника је дата формулом $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$,

гдје је I струја усљед кретања три наелектрисања укупног наелектрисања $Q = 4q$, који се крећу периодично са периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Тада је $I = \frac{Q}{T} = \frac{4q\omega}{2\pi}$. Коначно, магнетна индукција у центру троугла је $B = \frac{\mu_0\cdot\frac{4q\omega}{2\pi}}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\mu_0 q\omega}{\pi a\sqrt{3}}$.

5. Примјена закона преламања на страници AB даје

$$n' \sin\alpha = n \sin\beta$$
$$\sin\alpha = n\sin\beta$$

Очигледно је

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

Из троугла $AT'T$:

$$\frac{\theta}{2} + \theta + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi \quad \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = n\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2}\right)$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = n\cos\frac{3\theta}{2}$$
$$\cos\frac{3\theta}{2} = \cos\left(\theta + \frac{\theta}{2}\right) = \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

Изразимо $\cos\theta$ преко $\cos\frac{\theta}{2}$: $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \Rightarrow \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$

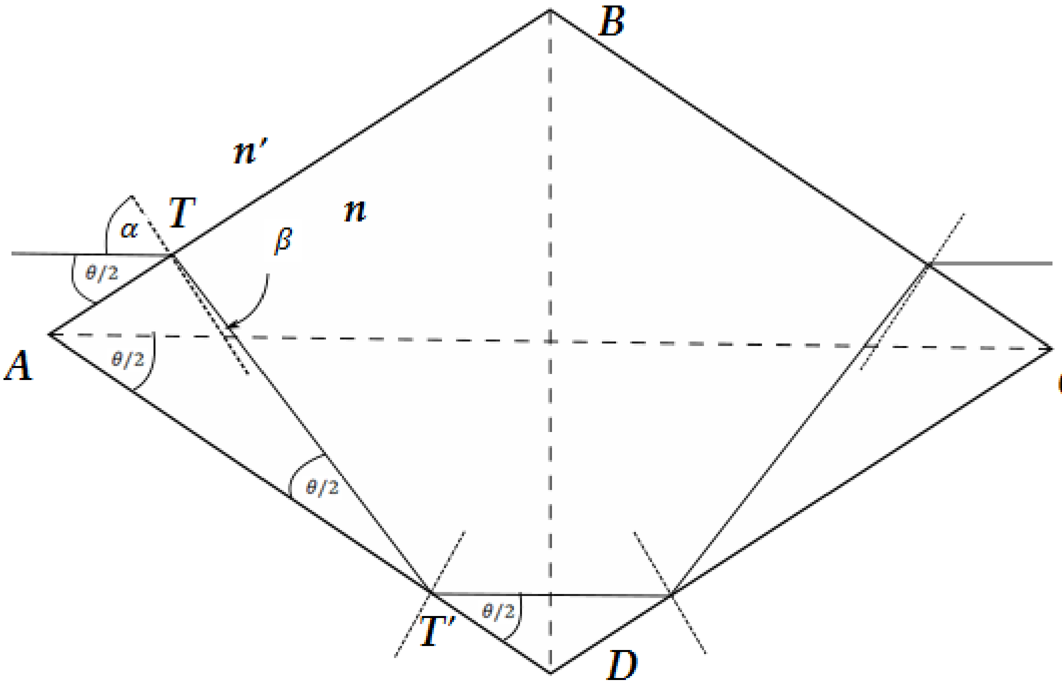
Изразимо $\sin\theta$ преко $\cos\frac{\theta}{2}$: $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$\cos\frac{3\theta}{2} = \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\cos^3\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2} - 2\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2} = 4\cos^3\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= \cos\frac{\theta}{2}\left(4\cos^2\frac{\theta}{2} - 3\right)$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = n\cos\frac{\theta}{2}\left(4\cos^2\frac{\theta}{2} - 3\right)$$
$$\cos\frac{\theta}{2}\left[1 - n\left(4\cos^2\frac{\theta}{2} - 3\right)\right] = 0$$

$\cos\frac{\theta}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \pi$, одбацује се са геометријом проблема,

$1 - n\left(4\cos^2\frac{\theta}{2} - 3\right) = 0 \;\Rightarrow\; \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3n+1}{4n}} \Rightarrow \theta = 2arccos\left(\sqrt{\frac{3n+1}{4n}}\right)$,

$$\theta = 35{,}659°.$$



B
n′
n
T
α
θ/2
β
A
θ/2
θ/2
C
T′
θ/2
D