30. РЕГИОНАЛНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (23. март 2024)

III РАЗРЕД

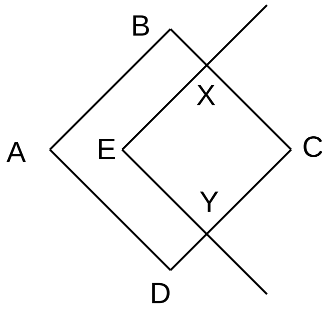
1. Хоризонтални диск масе 100 kg и полупречника 1,5 m ротира око своје вертикалне осе фреквенцијом 10 об/min. Човек масе 60 kg стоји при томе на крају диска. Коликом фреквенцијом ће ротирати диск ако човјек пређе у његов центар? Колики рад изврши човјек при том прелазу? Узети да се човек може посматрати као материјална тачка.

2. У овом задатку треба одредити специфично наелектрисање протона. У првом дијелу експеримента позиционирамо два неутрона (неутралне честице) на одређеном растојању и пустимо их да се приближавају усљед гравитационе интеракције. У другом дијелу, честице исте масе као и неутрон али наелектрисања различитог од нуле, протон и антипротон (позитивног и негативног наелектрисања) се пуштају са истог растојања као у првом дијелу задатка да се сударе. Уколико је однос времена судара првог и другог експеримента једнак $\omega = 1.11 * 10^{18}$, одредити специфично наелектрисање протона, односно $q_{протона}/m_{протона}$. ($k = 9 * 10^{9} Nm^2/C^2, G = 6.67 * 10^{-11} Nm^2/kg^2$).

3. Дат је проводни квадратни рам странице дужине $l\,(AB)$ и магнетно поље индукције B, нормално на површ контуре (Слика 1). Затим се брзином v дуж дијагонале рама превлачи проводни штап (XEY) као на слици. Одредити: а) Завиност електромоторне силе од положаја клизећег штапа x, б) Струју у раму у зависности од времена и в) Наелектрисање које прође у раму у зависности од времена. г) Одредити максимално наелектрисање у колу током кретања клизећег штапа. Отпор гране AB је R. Математичка помоћ: $\Delta x^2 = 2x\Delta x$.

4. Колики минималан рад треба извршити да би капљицу живе масе m = 10 g „угурали“ у стаклену капилару унутрашњег пречника d = 3 mm? Колико ће бити дугачак стуб живе у таквој капилари? Узети да су густина живе и коефицијент површинског напона живе 14000 kg/m^3, γ = 0,5 J/m^2. Жива не кваси стакло.

5. У електрохемијским експериментима често се шаљу наизмјенични сигнали радном уређају и прати се како импеданса зависи од фреквенције кола. Размотрити коло са извором наизмјеничне струје гдје је кондензатор паралелно везан са отпором R_2, а они редно везани са отпором R_1. Одредити максималну фазну разлику кашњења напона за струјом ако је $4R_1 = R_2$. (Математичка помоћ: максимум функције је $\frac{x}{a+x^2}$ рјешење једначине: $a = x^2$.) Упутство: одредите тангенс ове фазне разлике.



Слика 1

Задатке припремио: Драган Марковић, ФФ Београд
Рецензент: Проф. др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА III РАЗРЕД

1. Из $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ добија се $\omega_2 = \frac{M+2m}{M\,\omega_1}$, односно $\omega_2 = 22$ ob/min. Извршен рад је разлика кинетичких енергија: $A = \Delta E = \frac{1}{2}(I_2\omega_2^2 - I_1\omega_1^2) \approx 162{,}7\,J$.

2. а) Задатак рјешавамо помоћу Кеплерових закона (такође је могуће коришћење димензионе анализе за први дио задатка). Како је $T^2/r^3 = const = \alpha/Gm$, гдје је α нека геометријска константа (ученици слободно могу узети 1 за ову вриједност како није битна за овај задатак). Како је Кулонова сила такође централна и привлачна између наелектрисања супротног знака и за њу морају важити Кеплерови закони. Остало је да се одреди константа. Полазећи од једначине кретања за протон (или антипротон), тј. $ma = \pm(Gm^2/r^2 + kq^2/r^2)$, слиједи да је константа: $\alpha/(Gm + kq^2/m)$. Како се у оба случаја налазе на истим растојањима, за однос времена потребних за судар добија се: $\omega^2 = \frac{T_1{}^2}{T_2^2} = \frac{Gm+\frac{kq^2}{m}}{Gm} \approx \frac{k}{G}\cdot\frac{q^2}{m^2}$. Коначно је $q/m = \omega\sqrt{G/k} = 9.56 * 10^7 C/kg$.

(*Посљедњи дио се не може добити из димензионе анализе како зависи од односа маса који не мора бити један.*)

3. Треба наћи промјену површине током времена, одакле ћемо одредити остале потребне параметре. Нека је помјерај клизне шипке дуж дијагонале x. а) Пребрисана површина једнака је разлици површина квадрата, великог (цијелог рама) и мањег који остане након што клизна шипка пребрише x. Та површина је дата са: $S(x) = l^2 - (l - x/\sqrt{2})^2$. Како овај израз зависи од x^2 то је $\Delta x^2 = 2x\Delta x$. Пошто је $x = vt$, након дијељења са Δt добија се промјена пребрисане површине са временом: $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{l\Delta x\sqrt{2} - x\Delta x}{\Delta t} = v(l\sqrt{2} - x)$. Дакле, индукована електромоторна сила у колу је: $\varepsilon(x) = Bv(l\sqrt{2} - x)$. б) Струја у зависности од времена се добија када се уврсти $\varepsilon(x = vt)/R = Bv(l\sqrt{2} - vt)/R = I(t)$. в) Промјена наелектрисања у јединици времена једнака је струји, слично као у дијелу под а) користимо да је $\frac{\Delta t^2}{2} = t\Delta t$. Тако добијамо да се наелектрисање у колу мијења са временом: $q(t) = \frac{Blv\sqrt{2}}{R}t - \frac{Bv^2t^2}{2R}$. г) Максимално наелектрисање у колу се јавља када у колу не тече струја. То је тренутак када шипка излази из оквира рама, што се дешава када је $l\sqrt{2} = vt$. Након сређивања добијамо: $q_{max} = \frac{Bl^2}{R}$.

4. Рад потребан да бисмо унијели кап живе у капилару једнак је разлици енергија које потичу од површинског напона. Како је $V = m/\rho = 4/3r^3\pi = 0.71cm^3$ следи да је полупречник капљице: $r = 5.54\,mm$. Површина сфере је: $S_1 = 4\pi r^2 = 3.86\,cm^2$, док је површина коју ће капљица заузети у капилари једнака: $S_2 = \pi dh = 9.33cm^2$. Из запремине ваљка одређујемо висину стуба: $V = d^2\pi h/4$, тј. $h = 9.9cm$. Коначно, рад је једнак: $A = \gamma(S_2 - S_1) = 0.27\,mJ$.

5. У овом задатку препоручује се рад са комплексним обликом импедансе. Како су кондензатор и отпорник R_2 паралелно везани, њихов еквивалентни отпор је: $(1/R_2 + i\omega C)^{-1}$. Укупна импеднаса је дата са: $Z = R_1 + (1/R_2 + i\omega C)^{-1}$. Након сређивања овог израза добија се: $Z = R_1 + R_2/(1 + {R_2}^2 C^2\omega^2) - i\,{R_2}^2 C\omega/(1 + {R_2}^2 C^2\omega^2)$. Фаза се по дефиницији израчунава као аркустангенс количника имагинарног и реалног дијела импедансе (ученик може да ради и као однос реалног дијела кроз интензитет импедансе, али уз функцију аркускосинус). Дакле: $tg\varphi = -\frac{{R_2}^2 C\omega}{R_1 + R_2 + R_1 {R_2}^2 C^2\omega^2}$, што с обзиром на услов задатка, $4R_1 = R_2$, даје: $tg\varphi = -16\frac{R_1 C\omega}{5 + 16{R_1}^2 C^2\omega^2}$. Како тражимо максимално кашњење потребан нам је минимум овог израза, који добијамо за максимум функције у разломку, који се, с обзиром на математичку помоћ, достиже за вриједност: $5 = 16{R_1}^2 C^2\omega^2$, одакле је $C\omega = \frac{\sqrt{5}}{4R_1}$. Уврштавањем бројних вриједности и израчунавањем добија се:

$tg\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \varphi = -41.8°$.

II начин: помоћу фазора. Нека је импеданса паралелно везаног дијела кола Z_2, а цијелог кола Z. Тада се за Z_2 добија: $\frac{R_2}{\sqrt{1 + {R_2}^2 C^2\omega^2}}$. Како постоји фазна разлика α, импеданса редно везаног кола је $Z^2 = {Z_2}^2 + {R_1}^2 + 2Z_2 R cos\alpha$, гдје је $cos\alpha = R_2/Z_2$. Одавдје се добија укупна импеданса кола: $Z^2 = \frac{(R_1 + R_2)^2 + {R_1}^2 {R_2}^2 C^2\omega^2}{1 + {R_2}^2 C^2\omega^2}$. Сада је потребно одредити угао између струје и напона у колу. Како је отпор R_1 у фази са напоном неопходно је наћи угао између отпора R_1 и укупне импедансе. Овај резултат се добија из косинусне теореме: ${Z_2}^2 = {Z_{\square}}^2 + {R_1}^2 - 2Z_{\square} R cos\varphi.$ Уз ознаку $x = R_1 C\omega$ и коришћењем услова задатка, израз постаје: $\cos\varphi = \frac{(5 + 16x^2)}{\sqrt{(1 + 16x^2)}\sqrt{(25 + 16x^2)}}$. Коришћењем формуле: $\tan\varphi = -\frac{\sqrt{1 - cos^2\varphi}}{cos\varphi} = -16\frac{x}{5 + 16x^2}$. Максимум фунцкије дат је са $5 = 16x^2$, односно: $C\omega = \frac{\sqrt{5}}{4R_1}$. Уврштавањем бројних вриједности и израчунавањем добија се: $tg\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\varphi = -41.8°$.