# 28. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (30. април 2022)

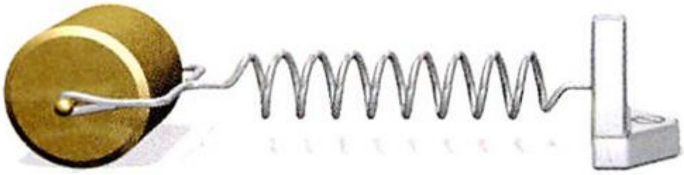
## III РАЗРЕД

1. Звучна виљушка прикачена за затегнуту жицу генерише трансверзалне таласе на жици. Осцилације звучне виљушке су нормалне на жицу. Њена фреквенција је $400\ Hz$, док је амплитуда њених осцилација $0{,}50\ mm$. Маса жице по јединичној дужини је $0{,}01\ kg/m$, док је сила затезања у жици $1\ kN$. Претпоставимо да нема рефлектованих таласа. а) Нађи период и фреквенцију таласа на жици, б) Колика је брзина таласа на жици? в) Нађи таласну дужину и таласни број таласа на жици, г) Напиши одговарајућу једначину која описује таласе на жици, д) Израчунај максималну брзину и убрзање тачака на жици, ђ) Нађи колика је средња енергија у јединици времена коју морамо довести виљушци да настави да осцилује константном амплитудом.

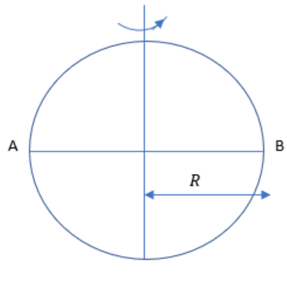
2. *а)* Двоструко јонизовани атом литијума ($Li^{2+}$) креће се брзином $\vec{v} = \left(2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}\right) m/s$ кроз подручје у којем постоји и електрично и магнетно поље. Магнетно поље се може векторски описати магнетном индукцијом $\vec{B} = \left(2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}\right) T$, а електрично вектором јачине електричног поља $\vec{\mathrm{E}} = \left(4\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}\right) V/m$. Ако су $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ јединични вектори $x, y\ z$ оса Декартовог координатног система, нађи векторски запис резултантне силе која дјелује на јон литијума, као и њен интензитет. Елементарно наелектрисање износи $e = 1{,}6\ \cdot 10^{-19}\ C$. Гравитациону силу занемарити.

*б)* Електромагнетни талас се простире кроз вакуум, при чему је електрично поље дато са $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t\right)$, а магнетно поље са $\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 \cos\left(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t\right)$, при чему је $\vec{\kappa} = \kappa\vec{\imath}$ таласни вектор , $\vec{E}_0 = E_0\vec{\jmath}$, док је $\vec{B}_0 = \vec{\kappa} \times \vec{E}_0/\omega$. Овакав талас преноси енергију и електричним и магнетним пољем. Израчунај однос густина енергија магнетног и електричног поља $u_B/u_E$ у овом таласу. Поједностави резултат максимално могуће.

3. Чврсти хомогени ваљак масе $6\ kg$ и пречника $0{,}06\ m$ котрља се без клизања по хоризонталној подлози. Осовина ваљка прикачена је за опругу константе $4000\ N/m$. (као на слици). Одреди фреквенцију осцилација овог система за мала одступања од равнотежног положаја.

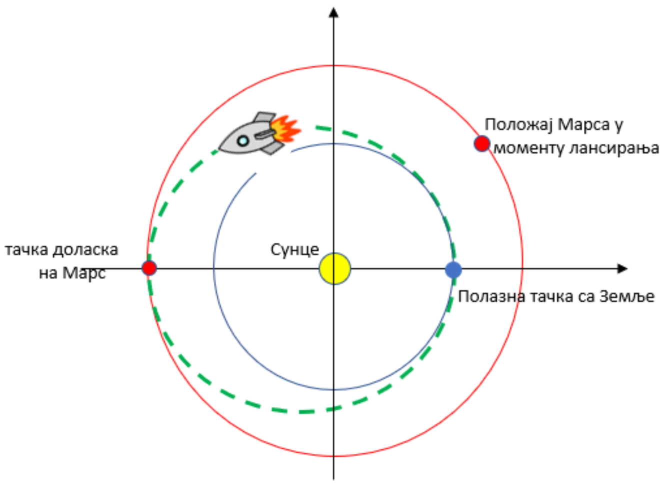


4. Апсорпционе спектралне линије настају у атмосферама звијезда усљед апсорпције електромагнетног зрачења од стране атома неког хемијског елемента, при чему долази до преласка електрона у омотачу са нижег енергетског нивоа на виши. Оне се виде као тамне линије тачно одређене таласне дужине суперпониране на континуални сунчев спектар. Апсорпционе спектралне линије у спектру Сунца открио је физичар Ј. Фраунхофер, по којем се и цијели апсорпциони спектар Сунца зове Фраунхоферовим. Свака апсорпциона линија носи потпис одређеног хемијског елемента, будући да сваки атом има сопствену расподјелу енергетских стања.




У строго контролисаним лабораторијским условима, таласна дужина једне од водоникових спектралних линија је $656\ nm$. Међутим, када мјеримо таласну дужину исте линије из Сунчевог зрачења, које стиже са дијаметралних крајева Сунчевог диска (тачке А и B), регистрована је разлика таласних дужина од $0{,}0088\ nm$. Одредити период обртања Сунца око своје осе, ако знамо да је полупречник Сунца $R = 6{,}96 \cdot 10^8\ m$. Брзина свјетлости је $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$, док је брзина ротације тачака на Сунцу $v << c$ (математичка помоћ: $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$ када је $x << 1$).

5. Један од енергетски најефикаснијих начина да се са Земље пошаље свемирски брод до Марса је такозвана Хохманова трансферна орбита, названа по њемачком инжењеру Валтеру Хохману. Идеја је сљедећа, умјесто да летјелица праволинијски иде од Земље до Марса, трошећи гориво цијелим путем, потребно је само послати летјелицу у погодном тренутку на елиптичну орбиту око Сунца (та тачка је перихел нове орбите летјелице), при чему летјелица долази до Марса тачно у афелу своје новоуспостављене орбите (слика). Како је оваква орбита летјелице најекономичнија, будући да се гориво троши искључиво на самом почетку и крају пута, за очекивати је да је вријеме путовања веће него када су трајекторије летјелица другачије од Хохманове, али зато Хохманова трајекторија омогућава пренос максималних количина корисног терета. Ваш задатак у овом проблему је да израчунате колико дана траје путовање до Марса ако је орбита Хохманова, као и да одредите угловно растојање у степенима између Земље и Марса на почетку путовања (угао који чине дуж која спаја Сунце са Земљом и дуж која спаја Сунце са Марсом). Познато је да је растојање од Сунца до Земље дато са $r_Z = 1{,}50 \cdot 10^{11}\ m$, растојање од Сунца до Марса је $r_M = 2{,}28 \cdot 10^{11}\ m$. Орбитални период Марса око Сунца износи 687 земаљских дана, док је орбитални период Земље око Сунца приближно 365 дана. Узети да су орбите Земље и Марса идеалне кружнице.




Задатке припремио: Доброслав Слијепчевић
Рецензент: Проф. Др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад

**РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА III РАЗРЕД**

**1.** *а)* Фреквенција таласа на жици једнака је фреквенцији звучне виљушке $\nu = 400\ Hz$ **,** па је период $T = \frac{1}{\nu} = 2{,}50\ ms$ **.** *б)* Брзина таласа на жици повезана је са силом затезања у жици и линеарном густином са $u = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 316\frac{m}{s}$ **,** *в)* Таласна дужина може се наћи преко брзине таласа и фреквенције $\lambda = \frac{u}{\nu} = 79{,}0\ cm$ **,** док је таласни број дат са $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 7{,}95\ m^{-1}$ **,** *г)* Генерални облик једначине таласа је $y(x,t) = y_0\ sin(kx \pm \omega t)$, а пошто смо $y_0$ добили у почетним подацима, а $k$ израчунали у дијелу под *в),* преостаје да нађемо угаону фреквенцију $\omega = 2\pi\nu = 2512\ s^{-1}$ **,** па је једначина таласа $y(x,t) = (0{,}50\ mm)\ \sin\left[(7{,}95\ m^{-1})x \pm (2512\ s^{-1})t\right]$, (Напомена: довољан је знак „–" у једначини, да је ученик претпоставио простирање у позитивном смјеру $x$ осе) *д)* Максимална брзина тачака на жици је $v_0 = y_0\omega = 1{,}26\ m/s$ **,** а максимално убрзање $a_0 = y_0\omega^2 = 3155\ m/s^2$ **,** *ђ)* Средња снага таласа дата је са $P = 2\pi^2\rho S u \nu^2 y_0^2$, а како је $\rho S = \frac{m}{L} = \mu$, добијамо $P = 2\pi^2 \mu u \nu^2 y_0^2 = 2{,}50\ W$ **.** То је уједно и снага коју је потребно доводити виљушци.

***2.*** *а)* Јон литијума је позитиван и његово наелектрисање је $q = 2e = 3{,}2\ \cdot 10^{-19}\ C$ **.** Векторски облик резултантне силе која дјелује на наелектрисану честицу је $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ **.** Користећи правила множења јединичних вектора (нпр. правило десне руке) добијамо**:**

$\vec{v} \times \vec{B} = \left[\left(2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}\right) \times \left(2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}\right)\right] Tm/s = \left(7\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) Tm/s$ **,** што коначно даје

$\vec{F} = 3{,}2\ \cdot 10^{-19}\left(4\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k} + 7\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right)N = 3{,}2\ \cdot 10^{-19}(11\vec{\imath} - 5\vec{\jmath})N$ **.** Компоненте силе су $F_x = 11 \cdot\ 3{,}2\ \cdot 10^{-19}N = 3{,}52\ \cdot\ 10^{-18}N$ и $F_y = -5 \cdot\ 3{,}2\ \cdot 10^{-19}N = -1{,}6\ \cdot\ 10^{-18}N$, па је резултанта дата са $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 3{,}87 \cdot\ 10^{-18}N$ **.**

*б)* Амплитуда магнетног поља дата је са је $\vec{B}_0 = \kappa\vec{\imath} \times \frac{E_0\vec{\jmath}}{\omega} = \frac{\kappa E_0}{\omega}\vec{k}$ гдје је $\vec{k}$ јединични вектор z-осе, што значи да су таласни вектор, вектор јачине електричног поља и вектор магнетне индукције међусобно нормални. Густина енергије електричног поља дата је са $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0|E^2|$ , док је густина енергије магнетног поља $u_B = \frac{1}{2\mu_0}|B^2|$ , па је :

$u_B/u_{\mathrm{E}} = \frac{\frac{1}{2\mu_0}|B^2|}{\frac{1}{2}\varepsilon_0|E^2|} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\kappa^2 E_0^2 \cos^2(\vec{\kappa}\cdot\vec{x} - \omega t),}{\omega^2 E_0^2 \cos^2(\vec{\kappa}\cdot\vec{x} - \omega t)} = \kappa^2/\varepsilon_0\mu_0\omega^2$, узимајући у обзир да је $(\vec{k})^2 = (\vec{\jmath})^2 = 1$. Како је брзина свјетлости у вакууму $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ , а такође важи веза између таласног броја, угаоне фреквенције и брзине таласа $c = \omega/k$, лако је закључити да је $u_B/u_{\mathrm{E}} = 1$ .

**3.** Идеја задатка је да се изједначе максимална кинетичка енергија ваљка и максимална еластична потенцијална енергија $E_{k,max} = E_{p,max}$ **.** Кинетичка енергија ваљка је збир транслационе и ротационе кинетичке енергије $\mathrm{E}_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$ при чему је момент инерције ваљка у односу на централну осу $I = \frac{1}{2}mR^2$ **,** а услов котрљања без проклизавања $v = \Omega R$ **,** из чега добијамо $\mathrm{E}_k = \frac{3}{4}mv^2$ **.** Потенцијална енергија је $\mathrm{E}_p = \frac{1}{2}kx^2$ па изједначавање максималне кинетичке и потенцијалне енергије даје $\frac{3}{4}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$. Ако употријебимо релацију $v_0 = x_0\omega$ која повезује максималну брзину, амплитуду и угаону фреквенцију осцилација, добијамо $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ **.** Тада је фреквенција $\nu = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}}\sqrt{\frac{2k}{3m}} = 3{,}36\ Hz$ **.**

**4.** При ротацији Сунца, тачке са једне стране пречника се удаљавају од нас радијалном брзином $v$, док се тачке са друге стране приближавају. Мјерећи таласну дужину свјетлости са тих крајева, усљед Доплеровог ефекта, таласна дужина свјетлости која стиже са краја који нам се приближава је смањена, док је таласна дужина свјетлости која стиже са краја који се удаљава од нас увећана. Генерална једначина за Доплеров ефекат у оптици за свјетлост из тачке која се приближава је $\lambda_1 = \lambda_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$ (плави помак), а за свјетлост из тачке која се удаљава $\lambda_2 = \lambda_0\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$, (црвени помак) међутим, за случај када је $v \ll c$ имамо $\lambda_1 = \lambda_0(1 - v/c)$ и $\lambda_2 = \lambda_0(1 + v/c)$ уз напомену да се ученику признају изрази било да их је знао напамет, било да их је извео из генералних једначина**)**, одакле добијамо $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_0 v/c$ **.** Радијална брзина дијаметрално супротних тачака на ободу Сунчевог диска је $v = \omega R$ **,** одакле се угаона брзина Сунца може изразити као $\omega = \Delta\lambda c/(2\lambda_0 R)$ **.** Период ротације Сунца је $T = 2\pi/\omega$ **,** па је $T = \frac{4\pi\lambda_0 R}{\Delta\lambda c} = 2173297\ s = 25{,}2\ d$**.**

**5.** Ако је орбита Хохманова, велика оса путање (што се види са слике) је збир полупречника Земљине и Марсове орбите око Сунца, па је велика полуоса такве путање: $a = \frac{1}{2}(r_z + r_M) = 1{,}89\ \cdot\ 10^{11}\ m$ **.** Вријеме путовања до Марса је једна половина периода Хохманове орбите $t = \frac{T_H}{2}$ , а како је по Трећем Кеплеровом закону $\frac{T_H^2}{a^3} = \frac{T_Z^2}{r_Z^3}$ , добијамо коначно да је $T_H = \frac{1}{2} T_z \left(\frac{a}{r_Z}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 259\ d$ . Ако је путовање до Марса дуго 259 дана, а орбитални период Марса је 687 дана, Марс је од момента лансирања до момента слијетања прешао угао $\theta = \frac{259}{687} \cdot 360^{\circ} = 136^{\circ}$. Ово значи да је летјелица морала бити лансирана када је угао између Земље и Марса био $180^{\circ} - 136^{\circ}$ =44°.