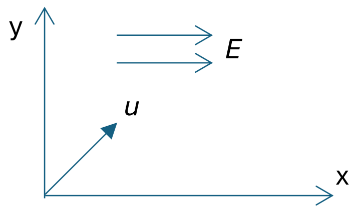
31. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (5. април 2025)

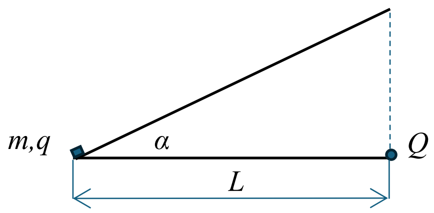
II РАЗРЕД

1. Количина топлоте коју радно тијело апсорбује од топлотног резервоара током Карноовог циклуса износи 14 kJ. Температура топлотног резервоара је 200 K, а коефицијент корисног дејства износи 0,6. Колика је температура хладњака, користан рад у току једног циклуса и количина топлоте коју радно тијело предаје хладњаку у току једног циклуса?

2. Наелектрисано тијело масе $m = 1\ \mathrm{kg}$ и наелектрисања $q = 2\ \mu\mathrm{C}$ избачено је са хоризонталне подлоге под углом $\theta = 45°$ брзином од 20 m/s (слика 1). У простору постоји хоризонтално електрично поље јачине $E = 2 \cdot 10^7\ \mathrm{V/m}$, као што је приказано на слици 1. На којој удаљености ће тијело пасти на хоризонталну подлогу. ($g = 10\ \mathrm{m/s^2}$)



Слика 1

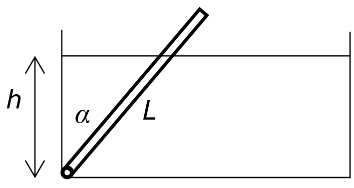


Слика 2

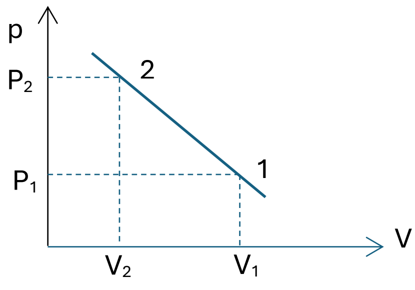
3. Мало тијело масе $m = 10\ \mathrm{g}$ и наелектрисања $q = 30\ \mathrm{nC}$ налази се у мировању на почетку стрме равни, као што је приказано на слици 2. Стрма раван са хоризонталом гради угао $\alpha = 30°$. Одредити минимално наелектрисање Q које треба поставити на растојању $L = 12\ \mathrm{cm}$ од малог тијела да би оно почело да се креће уз стрму раван. Одредити брзину малог тијела када растојање између њега и наелектрисања Q достигне своју минималну вредност,

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}$. Напомена: Наелектрисање Q је непокретно.

4. Један крај танке шипке дужине $L = 1\ \mathrm{m}$ и густине ρ причвршћен је шарком на дубини $h = 0{,}8\ \mathrm{m}$ испод нивоа воде, као на слици 3. Густина воде је $\rho_0 = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$.
Одредити положаје равнотеже шипке и утврдити да ли је равнотежа стабилна или нестабилна у следећим случајевима:
а) $\rho = 500\ \mathrm{kg/m^3}$
б) $\rho = 853\ \mathrm{kg/m^3}$



Слика 3



Слика 4

5. У цилиндру са клипом налзи се 0,02 kg хелијума запремине 0,032 $\mathrm{m^3}$ под притиском 415,43 kPa. Хелијум се доводи у стање у којем је притисак 1570 kPa, а запремина 0,009 $\mathrm{m^3}$. Одредити максималну температуру коју гас достигне током процеса, ако је зависност притиска од запремине у овом процесу линеарна (слика 4).
Моларна маса хелијума $M = 4\ \frac{g}{mol}$ а $R = 8{,}314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$.

Задатке припремио: Милко Бабић
Рецензент: Проф. др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА II РАЗРЕД

1. Коефицијент корисног дејства износи: $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, слиједи $T_2 = T_1(1 - \eta)$, $T_2 = 80$ K.
С друге стране је: $\eta = \frac{A}{Q_1}$, $A = \eta Q_1$, $A = 0{,}6 \cdot 14$ kJ $= 8{,}4$ kJ .
Даље је: $A = Q_1 - Q_2$ $\;Q_2 = Q_1 - A$, $Q_2 = 5{,}6$ kJ .

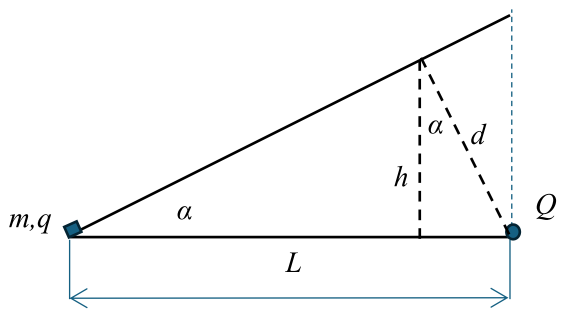
2. Путања тијела ће бити парабола, али ће кретање дуж x-осе бити убрзано јер у том правцу на тијело дјелује сила електричног поља. Вријеме кретања тијела може се одредити ако посматрамо компоненту брзине у вертикалном правцу, $u_{y0} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$, $u_y = u_{y0} - gt$. У највишој тачки путање вертикална компонента брзине u_y је нула, а вријеме за које тијело стигне у ту тачку $T_p = \frac{u_{y0}}{g}$. Вријеме пада је једнако времену пењања, а укупно вријеме кретања тијела $T = 2T_p = \frac{2u_{y0}}{g}$, $T = 2\sqrt{2}$ s.

Хоризонтални домет тијела $R = u_{x0} T + \frac{a_x T^2}{2}$ гдје је $u_{x0} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$, $a_x = \frac{qE}{m}$, $a_x = 40\ \frac{m}{s^2}$.
Коначно домет тијела је $R = 200$ m.

3. Да би наелектрисање Q покренуло мало тијело уз стрму раван, мора бити негативног знака и такво да компонента Кулонове силе у правцу косине стрме равни буде једнака компоненти силе теже на мало тијело у истом правцу: $k\frac{qQ}{L^2}\cos\alpha = mg\sin\alpha$ одатле $Q = \frac{mgL^2}{kq}\tan\alpha$ (1) , $Q = 3{,}02 \cdot 10^{-6}$ C .

Минимално растојање између наелектрисања је у правцу нормале на стрму раван и износи $d = L\sin\alpha$, а висина на којој се налази мало тијело у том тренутку је $h = d \cdot \cos\alpha = L\sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Током кретања на тијело дјелују само гравитациона сила и Кулонова сила, обје силе су конзервативне па можемо користити закон одржања механичке енергије. У почетном положају тијело има само електростатичку потенцијалну енергију, ако узмемо да је потенцијална енергија на хоризонтали једнака нули, а на минималном растојању између наелектрисања мало тијело има кинетичку енергију, гравитациону потенцијалну енергију и електростатичку потенцијалну енергију $k\frac{qQ}{L} = \frac{mv^2}{2} + mgh + k\frac{qQ}{d}$ (2) (чланови једначине који садрже количине наелектрисања ће бити негативни јер је Q негативно). Рјешење ове једначине

$v = \sqrt{\frac{2kq|Q|}{mL} - \frac{gL\sqrt{3}}{2}}$, $\quad v = 0{,}58$ m/s . Исто рјешење се може написати и у облику $v = \sqrt{2gL\left(\frac{1}{\cos\alpha} - tg\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)}$ ако се при рјешавању једначине (2) користи израз (1) и узме у обзир да је Q негативно.



4. Шипка је у равнотежи ако је збир момента гравитационе силе и силе потиска једнак нули. Пошто је густина шипке мања од густине воде, како у случају а), тако и у случају б), дио шипке мора бити изнад нивоа воде – осим у два тривијална положаја равнотеже у којима шипка стоји усправно или лежи на дну. Разлог за ово је следећи: ако је шипка потпуно урођена у воду, тачка дејства гравитационе силе и силе потиска налази се у њеном геометријском центру, тако да су им краци једнаки. Међутим, пошто је гравитациона сила ρSLg увијек мања од силе потиска $\rho_0 SLg$ (јер је густина шипке у оба случаја мања од густине воде), збир њихових момента никада неће бити нула, гдје је S површина попречног пресјека шипке, а ρ_0 густина воде. Стога ниједан положај шипке која је потпуно урођена у воду није стабилан.

Горњи крај шипке ће се подићи, једним дијелом изнад површине воде, док не достигне положај у којем ће момент силе потиска (услед промене крака силе и количине истиснуте воде), која делује на део шипке испод воде, достићи исту вредност као момент гравитационе силе која делује у центру шипке. Дужина дијела шипке под водом је $\frac{h}{\cos\alpha}$, гдје је α угао између шипке и вертикале. Сила потиска дјелује у центру потопљеног дијела шипке и њен крак у односу на шарку је $\frac{h}{2\cos\alpha}\sin\alpha$.

Збир момента гравитационе силе и силе потиска може се записати као:

$$\rho SLg\frac{L}{2}\sin\alpha-\rho_0 S\frac{h}{\cos\alpha}g\frac{h}{2\cos\alpha}\sin\alpha=0\ .$$

То води до $\cos\alpha=\frac{h}{L}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$. Замјењујући вредности у случају а) добијамо: $\cos\alpha=\frac{0{,}8}{1}\sqrt{\frac{1000}{500}}=1{,}13$, што је немогуће, па у случају а) постоје само два тривијална положаја равнотеже: за $\alpha_1=0°$ равнотежа је стабилна.

Положај $\alpha_1=0°$ је стабилан у случају а) јер је вриједност силе потиска у том положају $0{,}8LS\rho_0 g=800LSg$, а гравитациона сила износи $500LSg$. Обје силе имају момент нула у односу на шарку и штап је у равнотежи. Равнотежа је стабилна јер мало повећање угла α доводи до настанка момента силе и сила потиска будући јача својим моментом враћа штап у равнотежни положај.

Ако је $\alpha_2=90°$ равнотежа је нестабилна као и сваки полжај шипке потпуно под водом из горе наведених разлога.

За сваки други угао $0°<\alpha<90°$ момент силе потиска је већи од момента гравитационе силе и равнотежни положај није могућ.

У случају б), добијамо три положаја равнотеже:

$\cos\alpha=\frac{0{,}8}{1}\sqrt{\frac{1000}{853}}=0{,}866,\quad \alpha=30°$, тако да ће се моменти сила поништити када угао достигне $\alpha=30°$. Ако изведемо шипку из равнотежног положаја малим смањењем угла α сила потиска ће се смањити а тиме и њен момент и гравитациона сила ће штап вратити у равнотежни положај. Ако угао α мало повећамо тада ће порасти и сила потиска и њен момент ће бити већи од момента гравитационе силе и шипка се враћа у равнотежни положај.

Положај $\alpha_1=0°$ је нестабилан у случају б) јер је вриједност силе потиска у том положају $0{,}8LS\rho_0 g=800LSg$, а гравитациона сила износи $853LSg$. Обје силе имају момент нула у односу на шарку и штап је у равнотежи, али нестабилној јер мало повећање угла α доводи до настанка момента силе и гравитациона сила будући јача својим моментом удаљава штап од равнотежног положаја.

Према томе, положаји равнотеже су: $\alpha_1 = 0°$ и $\alpha_2 = 90°$, оба нестабилна, и $\alpha_3 = 30°$, који је стабилан.

5. Пошто је зависност између притиска и запремине линеарна функција, може се написати у облику $p = aV + b$ (1) , гдје се a и b могу одредити са графика. Права пролази кроз тачке 1 и 2 па можемо писати: $p_1 = aV_1 + b$, $p_2 = aV_2 + b$. Рјешење овог система једначина су: $a = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2}$, $a = -50{,}22\,\frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{m}^3}$ и $b = \frac{p_2V_1 - p_1V_2}{V_1 - V_2}$, $b = 2.02\ \mathrm{MPa}$.

Замјеном израза за притисак (1) у једначину стања идеалног гаса: $pV = \frac{m}{M}RT$ добија се $\mathrm{a}V^2 + bV = cT$, гдје је $c = \frac{mR}{M}$, односно $T = \frac{a}{c}V^2 + \frac{b}{c}V$. Температура гаса у процесу се мијења у зависности од запремине као квадратна функција са негативним коефицијентом уз квадратни члан (јер је a негативно) као на слици. Стога координате тјемена параболе представљају њен максимум и он износи:

$V_{max} = -\frac{b}{2a}$, $V_{max} = 0.02\ \mathrm{m}^3$, $T_{max} = \frac{a}{c}V_{max}^2 + \frac{b}{c}V_{max} = 488{,}8\ K$.