

31. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА

СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (5. април 2025)

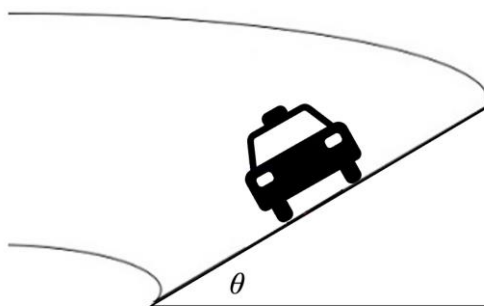
I РАЗРЕД

1. Аутомобил се креће по кружној стази полупречника $r = 20 \text{ m}$, која је нагнута ка унутрашњости кружне путање под углом $\theta = 15^\circ$ у односу на хоризонталу (Слика 1).

а) Одредити максималну брзину којом аутомобил може да се креће без проклизавања, задржавајући кружну путању. Коефицијент статичког трења између точкова аутомобила и стазе је $\mu = 0,5$.

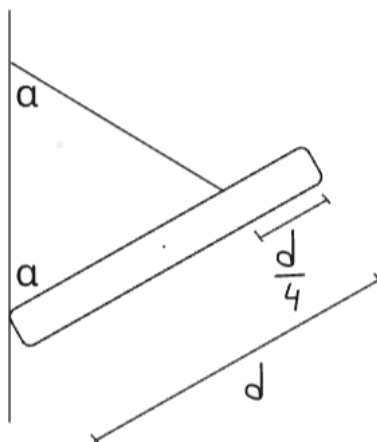
б) Колика је максимална брзина кретања аутомобила по истој кружној путањи у случају да је трење занемарљиво?

в) Колика је максимална брзина кретања аутомобила по истој кружној путањи у случају да је стаза хоризонтална?



Слика 1.

2. Планинар висине $d = 180 \text{ cm}$ и масе $m = 80 \text{ kg}$ пење се уз вертикалну литицу, при чему је осигуран ужетом. Уже је једним крајем везано за планинара у тачки која се налази на $\frac{1}{4}$ његове висине од врха главе (Слика 2). Други крај ужета је причвршћен за литицу, тако да уже заклапа исти угао са вертикалом као и тијело планинара у односу на литицу. Планинара моделујемо као хомогену тешку греду. Коефицијент трења између његових стопала и литице је $\mu = 0,3$. Одредити силу затезања сигурносног ужета.



Слика 2.

3. Земља има средњи полупречник $R = 6378 \text{ km}$, а убрзање Земљине теже у свим тачкама на њеној површини узима се као $g = 9,80552 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Претпоставља се да је Земља хомогена кугла густине ρ . Запремина кугле дата је изразом $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

а) Показати да је јачина гравитационог поља унутар Земље, према овом моделу, директно сразмјерна удаљености од центра Земље.

б) Одредити разлику јачина гравитационог поља на висини $h = 20 \text{ km}$ изнад површине Земље и у тачки која се налази $d = 10 \text{ km}$ испод површине Земље.

4. Лифт убрзава навише сталним убрзањем $a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Висина лифта износи $h = 2,5 \text{ m}$. Након $t_1 = 3 \text{ s}$ од почетка кретања лифта, са плафона (врха лифта) се одваја шраф масе $m = 80 \text{ g}$. Претпоставља се да је гравитационо убрзање приближно константно током кретања.

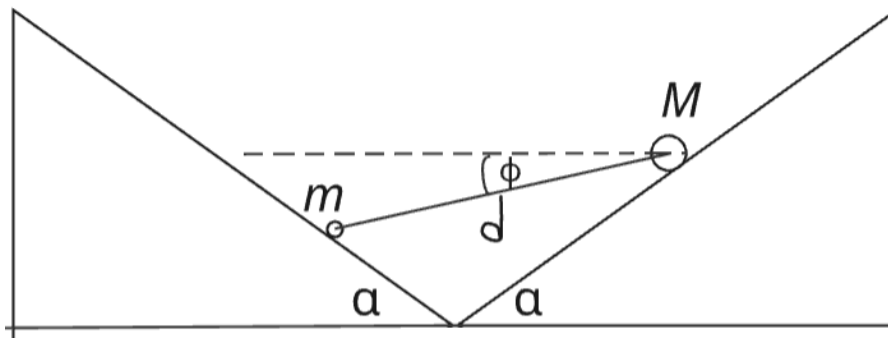
а) Одредити вријеме пада шрафа од плафона до пода лифта.

б) Израчунати укупан пређени пут шрафа у односу на посматрача на Земљи.

в) Одредити помјерај шрафа у односу на посматрача на Земљи.

г) Након пада на под лифта, шраф се зауставља без одбијања. Интеракција између шрафа и пода траје $\Delta t = 0,02 \text{ s}$. Израчунати средњу нормалну силу реакције пода на шраф током његовог заустављања.

5. На слици је приказан систем који се састоји из двије кугле, чији су центри повезани лаганим штапом дужине d . Кугле леже на глатким стрмим равнима које се додирују у врху (Слика 3). Нагибни углови обје стрме равни су једнаки и износе по $\alpha = 45^\circ$. Маса кугли износе m и $M = 4m$. Одредити угао Φ који штап заклапа са хоризонталом у случају да се систем налази у статичкој равнотежи. Претпоставити да су кугле материјалне тачке на површини стрме равни (занемарити њихове полупречнике).



Слика 3.

У свим задацима (осим у 3. задатку) узети за вриједност гравитационог убрзања $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Задатке припремила: *Александра Радић*

Рецензент: *Проф. др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад*

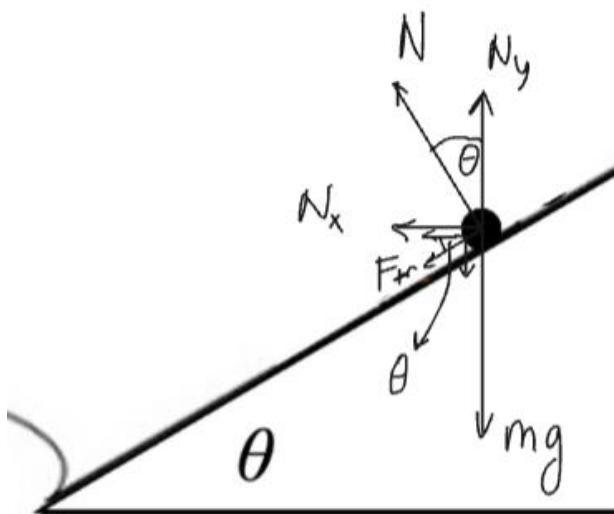
31. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (5. април 2025)

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА I РАЗРЕД

1. а) Слика 1: Силу трења растављамо на компоненте дуж x- и y-оса: $F_{tr,x} = \mu N \cos \theta$ и $F_{tr,y} = \mu N \sin \theta$.

Силу нормалне реакције подлоге растављамо на компоненте дуж x и y оса:

$$N_x = N \sin \theta \text{ и } N_y = N \cos \theta.$$



Слика 1. Дијаграм сила и одговарајуће компоненте

Резултантна сила у правцу x-осе је центрипетална сила: $F_{cp} = N_x + F_{tr,x}$

Резултантна сила у правцу y-осе је једнака нули: $0 = N_y - F_{tr,y} - mg$

Уврстимо изразе за силе у дате једначине

$$\frac{mv^2}{r} = N \sin \theta + \mu N \cos \theta \text{ и } 0 = N \cos \theta - \mu N \sin \theta - mg$$

Изразимо масу из друге једначине и убацимо у прву те добијамо коначну формулу за брзину

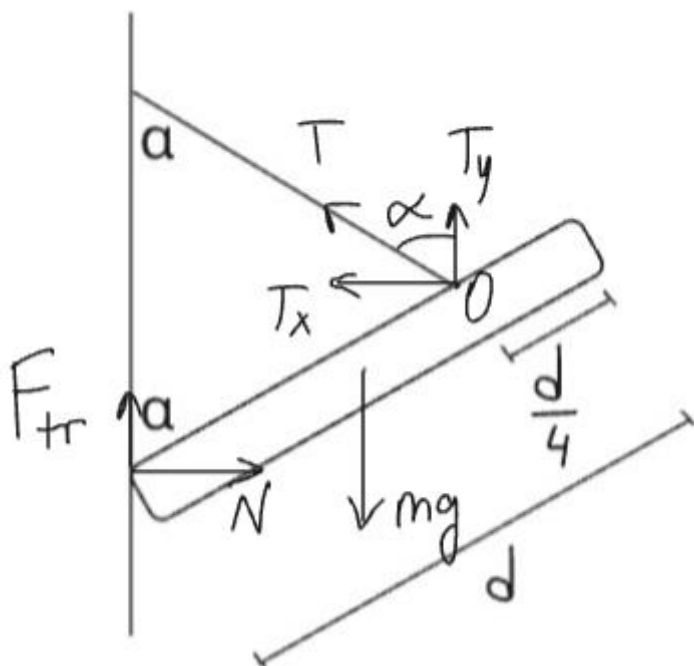
(поступак): $v = \sqrt{\frac{rg(\tan \theta + \mu)}{1 - \mu \tan \theta}} = 13,19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

б) У овом случају је коефицијент трења нула те из претходне једначине слиједи:

$$v = \sqrt{rg \tan \theta} = 7,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

в) У овом случају, угао је нула, па отуда слиједи: $v = \sqrt{rg\mu} = 9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2. Слика 2: Силу затезања нити растављамо на компоненте дуж x- и y-осе: $T_x = T \sin \alpha$ и $T_y = T \cos \alpha$



Слика 2. Дијаграм сила и одговарајуће компоненте

Услов равнотеже у правцу x-осе је: $N = T \sin \alpha$

Услов равнотеже у правцу y-осе је: $F_{tr} + T \cos \alpha = mg$

Изразимо силу затезања из обје једначине: $T = \frac{N}{\sin \alpha}$, $T = \frac{mg - \mu N}{\cos \alpha}$

Затим изједначимо последње двије једначине те добијемо: $\tan \alpha = \frac{N}{mg - \mu N}$ (1)

За осу ротације узмемо тачку O у којој је уже завезано за планинара.

Момент силе трења у односу на тачку O је: $M_{tr} = F_{tr} \frac{3}{4} d \sin \alpha$

Момент силе нормалне реакције подлоге у односу на тачку O је: $M_N = N \frac{3}{4} d \cos \alpha$

Момент силе Земљине теже у односу на тачку O је: $M_g = mg \frac{1}{4} d \sin \alpha$

Услов равнотеже момената сила: $M_N + M_g = M_{tr}$

Слиједи: $N \frac{3}{4} d \cos \alpha + mg \frac{1}{4} d \sin \alpha = F_{tr} \frac{3}{4} d \sin \alpha$, $3N \cos \alpha + mg \sin \alpha = 3\mu N \sin \alpha$

Дијелењем последње једначине са $\cos \alpha$ добијемо: $\tan \alpha = \frac{3N}{3\mu N - mg}$ (2)

Изједначимо једначине (1) и (2) те добијамо: $N = \frac{2mg}{3\mu} = 1744 \text{ N}$

Уврстимо N у једначину (1) и добијамо угао: $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2}{\mu} \right) = 81,469^\circ$

Слиједи да је сила затезања: $T = \frac{N}{\sin \alpha} = 1763,51 \text{ N}$.

3. а) Из формула за запремину кугле $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, затим за густину $\rho = \frac{M}{V}$, те јачину гравитационог поља $g = G \frac{M}{r^2}$ слиједи: $g = G \frac{\rho \frac{4}{3}r^3\pi}{r^2} = \frac{4}{3}G\rho\pi r$. Пошто су у овој једначини све величине константне, осим удаљености од центра r , слиједи да је јачина гравитационог поља директно сразмјерна удаљености од центра Земље.

б) Јачина гравитационог поља на површини Земље је: $g = G \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3}G\rho\pi R$

Јачина гравитационог поља на висини h изнад површине Земље је: $g_1 = G \frac{M}{(R+h)^2}$

Јачина гравитационог поља на дубини d испод површине Земље је: $g_2 = \frac{4}{3}G\rho\pi(R-d)$

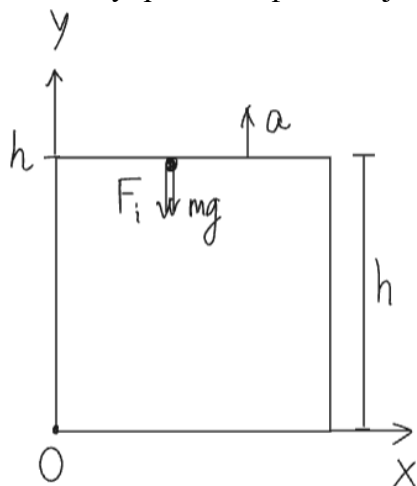
Однос јачина гравитационих поља на датој висини и на површини Земље је: $\frac{g_1}{g} = \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$

Однос јачина гравитационих поља на датој дубини и на површини Земље је: $\frac{g_2}{g} = \frac{R-d}{R}$

Разлика јачина гравитационих поља износи: $g_2 - g_1 = g \left(\frac{R-d}{R} - \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \right)$

$$g_2 - g_1 = 0,04583 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

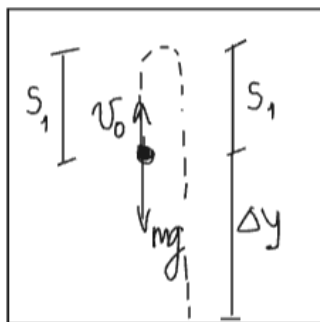
4. а) Слика 3: У неинерцијалном референтном систему везаном за лифт положај шрафа је дат са једначином: $y = y_0 + v_0't_2 + \frac{at_2^2}{2}$, гдје важи: почетни положај је $y_0 = h$, крајњи положај је $y = 0$, t_2 је вријеме кретања шрафа након одвајања од плафона до пада на под, почетна брзина шрафа у односу на лифт је нула $v_0' = 0$. Убрзање a' се налази из једначине за други Њутнов закон у неинерцијалном систему: $ma' = -mg - ma$, гдје је инерцијална сила $F_i = ma$, те a убрзање лифта. Слиједи: $a' = -(g + a)$.



Слика 3: Неинерцијални систем везан за лифт

Из претходних једначина добија се вријеме пада: $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0,68 \text{ s}$.

б) Слика 4: Узмимо сада референтни инерцијални систем везан за посматрача на Земљи. Шраф прије одвајања се креће убрзањем a које има лифт и за вријеме од 3 s достигне брзину: $v_0 = at_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Након одвајања шраф се креће нагоре овом брзином, затим достиже максималну висину гдје се зауставља, а затим слободно пада на доле. Стога се пређени пут може наћи као збир пута на горе s_1 и доле s_1 (који траје исто времена) и укупног помјераја Δy шрафа: $s = 2s_1 + |\Delta y|$.



Слика 4. Кретање из инерцијалног система везаног за Земљу

Помјерај се налази из: $\Delta y = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = -0,228 \text{ m}$

Пут на горе се налази из: $s_1 = \frac{v_0^2}{2g} = 0,4587 \text{ m}$

Укупан пут је стога: $s = 1,145 \text{ m}$

в) Помјерај је одређен: $\Delta y = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = -0,228 \text{ m}$

г) При интеракцији са подом, смањује се брзина шарафа од максималне вриједности до нуле.

Из другог Њутновог закона слиједи: $\frac{\Delta p}{\Delta t} = N - mg$, одакле је $N = \frac{\Delta p}{\Delta t} + mg$

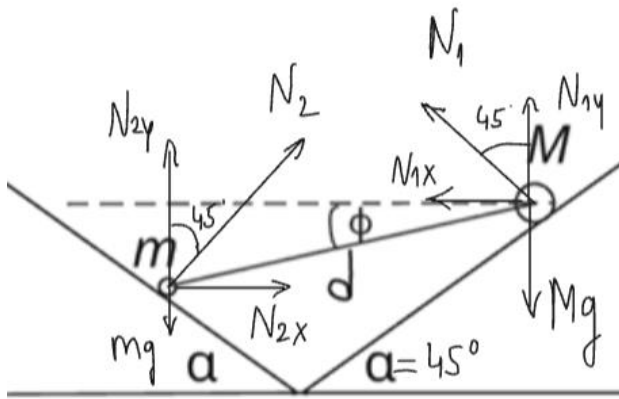
Промена импулса Δp се налази из промене брзине при удару. Потребно је наћи крајњу, максималну брзину шарафа при удару у под: $v = v_0 - gt_2 = -3,6708 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Промена брзине је $\Delta v = 3,6708 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Слиједи да је средња нормална реакција подлоге: $N = \frac{m\Delta v}{\Delta t} + mg = 15,468 \text{ N}$.

5. Слика 5: Компоненте нормалних реакција подлога су дате са:

$$N_{2x} = N_{2y} = \frac{N_2}{\sqrt{2}} \text{ и } N_{1x} = N_{1y} = \frac{N_1}{\sqrt{2}}$$



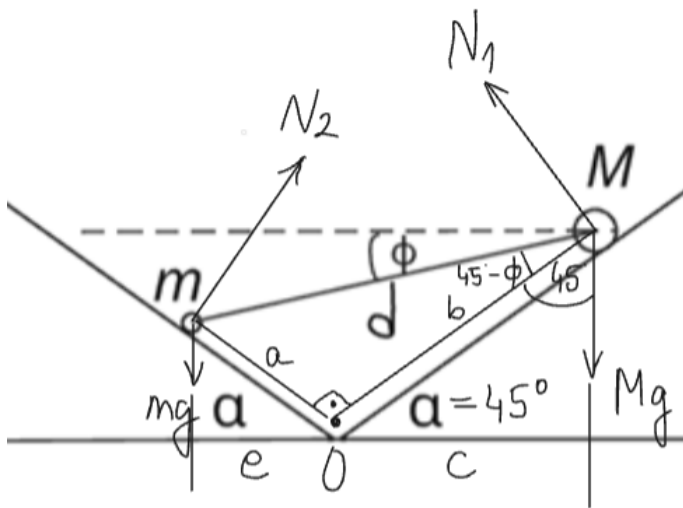
Слика 5. Дијаграм сила и одговарајуће компоненте

Услов равнотеже силе у правцу x осе: $N_{1x} = N_{2x}$

Услов равнотеже силе у правцу y осе: $N_{1y} + N_{2y} = mg + Mg$

Из претходних једначина слиједи да су нормалне реакције једнаке $N_1 = N_2 = N$, те услов равнотеже сила постаје: $\frac{N}{\sqrt{2}} + \frac{N}{\sqrt{2}} = mg + Mg$

Одавде се добија: $N = \frac{1}{\sqrt{2}}g(M + m)$



Слика 6. Силе и одговарајући кракови сила

Слика 6: Момент силе десне нормалне реакције: $M_1 = Nb$, гдје је $b = d \cos(45^\circ - \Phi)$

Момент силе лијеве нормалне реакције: $M_2 = Na$, гдје је $a = d \sin(45^\circ - \Phi)$

Момент силе десне тежине: $M_{g1} = Mgc$, гдје је $c = b \cos 45^\circ = \frac{b}{\sqrt{2}}$

Момент силе лијеве тежине: $M_{g2} = mge$, гдје је $e = a \cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Услов равнотеже момената сила око тачке O: $M_1 + M_{g2} = M_2 + M_{g1}$

Слиједи: $Nd \cos(45^\circ - \Phi) + mg \frac{d \sin(45^\circ - \Phi)}{\sqrt{2}} = Nd \sin(45^\circ - \Phi) + Mg \frac{d \cos(45^\circ - \Phi)}{\sqrt{2}}$

Подијелимо једначину са $\cos(45^\circ - \Phi)$, уврстимо израз за нормалну реакцију подлоге $N = \frac{1}{\sqrt{2}}g(M + m)$, те добијамо: $\tan(45^\circ - \Phi) = \frac{m}{M}$

Одавде слиједи да је угао: $\Phi = 30,9638^\circ \approx 31^\circ$.