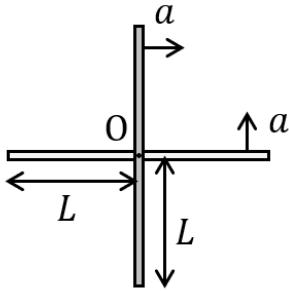
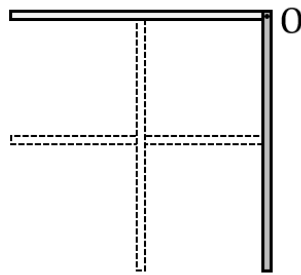


VIII РАЗРЕД

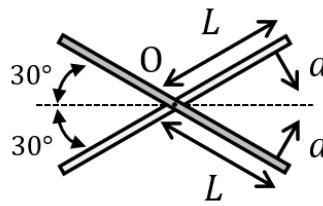
1. Два танка штапа једнаких дужина $2L$ се налазе у хоризонталној равни један преко другог. Штапови започињу кретање из стања мировања и крећу се равномерно праволинијски у правцу својих нормала убрзањима истог интензитета a . При кретању штапова не долази до њихове ротације.
- (а) Одредити вријеме потребно да се штапови одвоје један од другог t_a и средњу брзину v_a којом се креће пресјечна тачка штапова O ако је почетни положај у ком се налазе штапови приказан на слици 1a.1, а крајњи на слици 1a.2.
- (б) Одредити вријеме потребно да се штапови одвоје један од другог t_b и средњу брзину v_b којом се креће пресјечна тачка штапова O ако је почетни положај у ком се налазе штапови приказан на слици 1b.1, а крајњи на слици 1b.2.



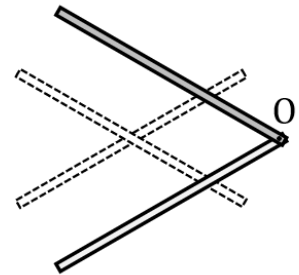
Слика 1a.1



Слика 1a.2

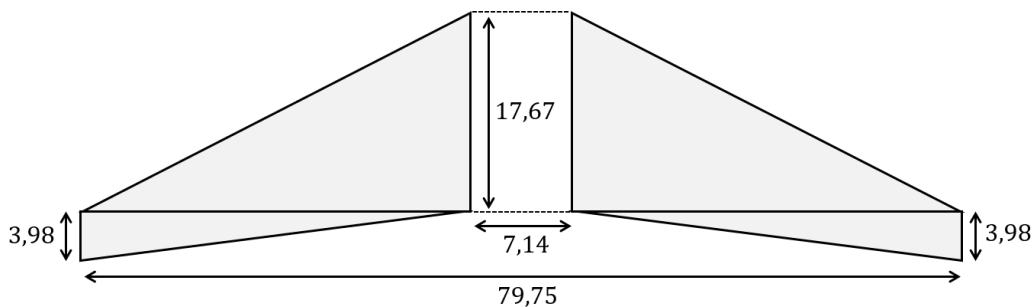


Слика 1b.1



Слика 1b.2

2. Максимална ефикасност ваздушног саобраћаја се добија при премошћавању великих раздаљина као што су интерконтинентални летови. За такве намјене произведен је и највећи авион на свијету, *Airbus A380*, а у овом задатку ћемо размотрити неке од његових особина.
- (а) Да би авион укупне масе $m = 475 \text{ t}$ могао да полети неопходно је да при одвајању од писте има брзину $v = 360 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Авион се погони са четири млазна мотора, а сваки од њих генерише константну вучну силу од по $F = 250 \text{ kN}$. Сила трења између точкова и подлоге заједно са силом отпора ваздуха износи 5 % укупне вучне силе авиона. Одредити минималну дужину писте s_{\min} да би полијетање авиона било могуће и укупну средњу снагу P_{sr} коју при овом полијетању развијају мотори авиона. Сматрати да авион кретање започиње из стања мировања.
- (б) Поједностављени модел крила авиона са назначеним димензијама у m је приказан на слици. Израчунати површину крила авиона S .



Слика 2б.

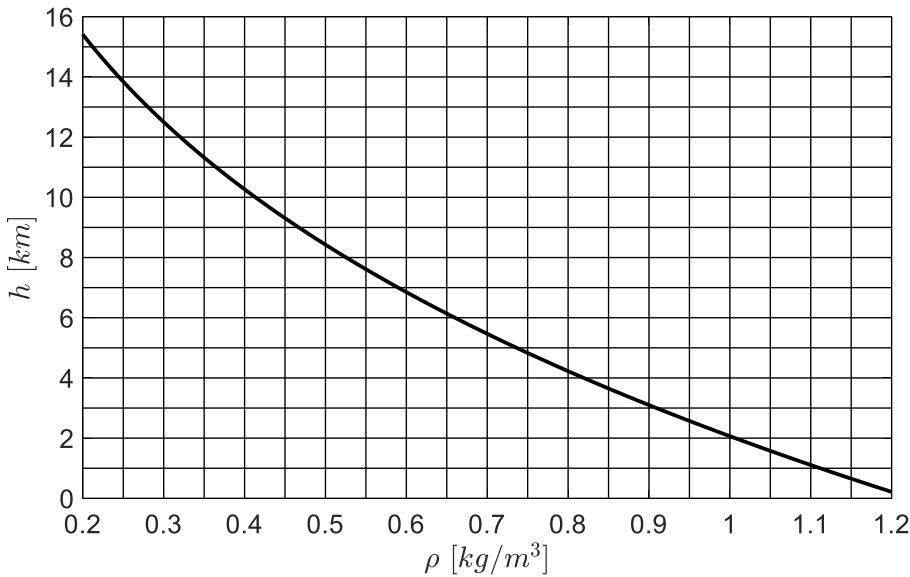
- (в) Одржавање авиона у ваздуху омогућава сила динамичког узгона. Ова сила дјелује нормално на површину крила, а јавља се због разлике у притиску ваздуха испод и изнад крила. Ако је маса авиона $m = 475 \text{ t}$, а тачна површина његових крила $S = 845 \text{ m}^2$ израчунати вриједност разлике притисака ваздуха испод и изнад крила Δp . Сматрати да је површина крила хоризонтална тј. да сила динамичког узгона дјелује вертикално увис.
- (г) Вриједност разлике у притиску ваздуха испод и изнад крила Δp зависи од брзине струјања ваздуха испод површине крила v_{ispod} и изнад површине крила v_{iznad} по Бернулијевом закону:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_{\text{iznad}}^2 - v_{\text{ispod}}^2)$$

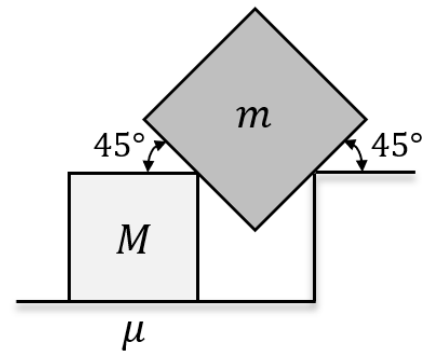
гдје је ρ густина ваздуха. Да би избјегли лоше вријеме и смањили отпор ваздуха авиони лете на великим висинама. Овакав начин лета се назива крстарење, а брзина кретања авиона у овој фази лета се назива брзином крстарења.

Нека се авион налази на висини h изнад подлоге и крстари небом брзином $v = 900 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Брзина струјања ваздуха испод површине крила је једнака брзини крстарења, а брзина струјања ваздуха изнад површине крила је 1,2 пута већа од брзине крстарења. Густина ваздуха ρ се мијења са промјеном висине, а зависност облика $h = h(\rho)$ је приказана на слици 2г. Ако је вриједност разлике притиска ваздуха испод и изнад крила $\Delta p = 4,25 \text{ kPa}$, одредити висину h на којој се авион налази.

(д) Да би авион безбједно слетио његова брзина у тренутку када му точкови дотакну писту мора да износи $v_0 = 270 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Након тога кочи и успорава константним успорењем до брзине $v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Познато је да од временског тренутка $t_3 = 3 \text{ s}$, до временског тренутка $t_7 = 7 \text{ s}$ он прелази пут $\Delta s_{37} = 240 \text{ m}$, при чему је за нулти тренутак времена узет тренутак када су точкови дотакли писту. Одредити интензитет успорења авиона a_{stop} и пут s_{stop} који пређе при успоравању од брзине v_0 до брзине v .

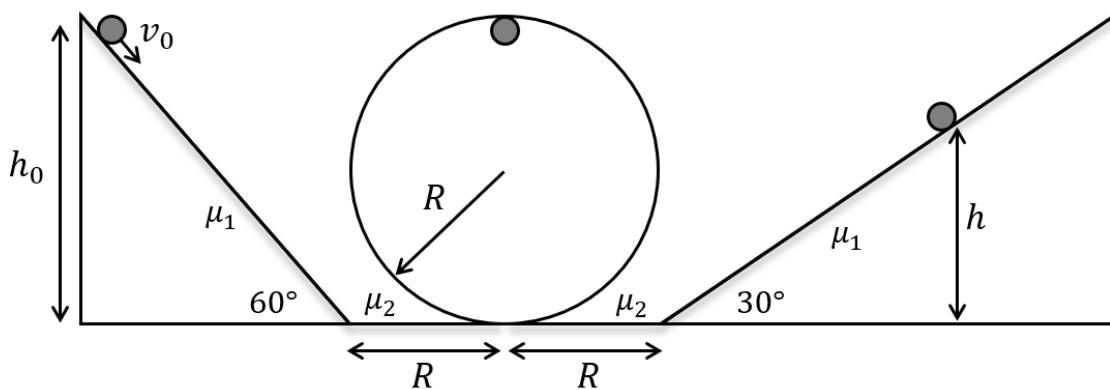


Слика 2г.



Слика 3.

- Између блока масе $M = 3 \text{ kg}$ и непокретног степеника је постављен блок масе $m = 2 \text{ kg}$ на начин као што је то приказано на слици 3. Коефицијент трења између доњег блока и подлоге је μ , док је међусобно трење између блокова као и између горњег блока и степеника занемариво. Ако се систем налази у статичкој равнотежи, израчунати коефицијент трења μ .
- Куглица занемарљивих димензија је пуштена да се креће са врха непокретне стрме равни нагибног угла 60° и висине $h_0 = 2R$. Почетна брзина куглице је $v_0 = \sqrt{5gR}$, а њен правац је паралелан са подлогом. Након што се спусти низ стрму раван куглица по хоризонталној подлози прелази пут дужине R , пролази кроз кружну петљу полупречника R , поново по хоризонталној подлози прелази пут дужине R , а затим се пење уз непокретну стрму раван нагибног угла 30° . Коефицијент трења између куглице и обе стрме равни износи $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а између куглице и хоризонталне подлоге $\mu_2 = 0,5$ док је између куглице и кружне петље трење занемариво. Куглица ни у једном тренутку не губи контакт са подлогом, а при кретању по храпавој подлози на њу дјелује само сила трења клизања. Ако је $R = 30 \text{ cm}$, одредити висину h на којој ће се куглица зауставити на крају кретања.



Слика уз зад. 4.

5. У индустрији се често јавља потреба за кориштењем воде тачно одређене температуре. Гријачи који се користе за загријавање воде не могу тренутно да се искључе па би њихово искључивање у тренутку када вода достигне жељену температуру довело до њеног нежељеног загријавања још неко вријеме све док се гријач не охлади на температуру воде. Како би се избјегле овакве појаве користе се уређаји који се називају *регулатори* снаге гријача. Овај уређај у зависности од вриједности *грешке* $e = t_{\text{ref}} - t$ која представља разлику између жељене (*референтне*) t_{ref} и тренутне температуре t мијења снагу гријача на следећи начин:

$$P(e) = \begin{cases} 0 \text{ W}, & e \leq 0 \text{ }^\circ\text{C} \\ 500 \text{ W}, & 0 \text{ }^\circ\text{C} < e \leq 5 \text{ }^\circ\text{C} \\ 1\,000 \text{ W}, & 5 \text{ }^\circ\text{C} < e \leq 15 \text{ }^\circ\text{C} \\ 2\,000 \text{ W}, & e > 15 \text{ }^\circ\text{C} \end{cases}$$

Овако смо обезбиједили да снага гријача у тренуцима када је тренутна температура воде блиска жељеној буде мала, а самим тим и његова температура, што ће у великој мјери смањити могућност за прегријавање.

Потребно је загријати воду у резервоару запремине $V = 100 \text{ } \ell$ и почетне температуре $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ до жељене температуре $t_{\text{ref}} = 90 \text{ }^\circ\text{C}$. Резервоар је идеално топлотно изолован од околине, а за загријавање воде се користе гријачи са описаним *регулатором* снаге.

(а) Израчунати грешку у почетном тренутку e_0 .

(б) Представити зависност снаге гријача од тренутне температуре воде $P(t)$.

(в) Одредити вријеме τ потребно да се вода загрије од почетне до жељене температуре.

Густина воде је $\rho = 1\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, а њен специфични топлотни капацитет износи $c = 4\,200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$.

Помоћ: систем линеарних неједначина: $a - x > 0$ и $b - x \leq 0$, гдје су $a, b \in \mathbb{R}$ има рјешење $b \leq x < a$

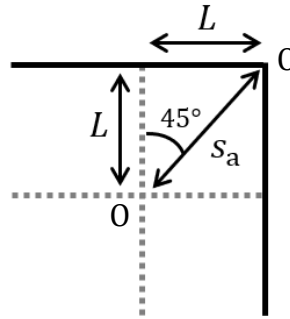
Напомена: у рјешавању задатака користити да је убрзање Земљине теже $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Задатке припремио: *Борис Баршић*, Електротехнички факултет у Београду
Рецензент: Академик. проф. др *Јован Шетрајчић*, дипл. физ.

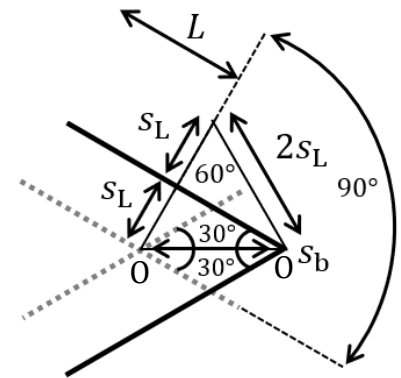
РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА VIII РАЗРЕД

1. $2L, a, t_a = ?, v_a = ?, t_b = ?, v_b = ?$

(а) За вријеме t_a штапови од почетног до крајњег положаја прелазе једнаке путеве $s_L = \frac{1}{2}at_a^2$ (1). На основу слике 1а имамо да је: $s_L = L$ (2), одакле замјеном (2) у (1) добијамо да је: $t_a = \sqrt{\frac{2L}{a}}$ (3). За исто вријеме t_a тачка пресека штапова прелази пут s_a , па је њена средња брзина: $v_a = \frac{s_a}{t_a}$ (4). На основу слике 1а закључујемо да је $s_a = L\sqrt{2}$ (5), те замјеном (5) у (4) и на основу (3) добијамо да је средња брзина пресјечне тачке штапова $v_a = \sqrt{aL}$.



Слика 1а



Слика 1б

(б) За вријеме t_b штапови од почетног до крајњег положаја прелазе једнаке путеве $s_L = \frac{1}{2}at_b^2$ (6). На слици 1б видимо да пут s_L који штапови прелазе представља половину странице једнакостраничног троугла висине L , па одатле слиједи да је $s_L = \frac{L\sqrt{3}}{3}$ (7). Замјеном (7) у (6) добијамо да је: $t_b = \sqrt{\frac{2L\sqrt{3}}{3a}}$ (8). За исто вријеме t_b тачка пресека штапова прелази пут s_b , па је њена средња брзина: $v_b = \frac{s_b}{t_b}$ (9). На основу слике 1а закључујемо да је $s_b = L$ (10), па замјеном (10) у (9) и на основу (8) добијамо да је средња брзина пресјечне тачке штапова једнака је: $v_b = \sqrt{\frac{aL\sqrt{3}}{2}}$.

2. (а) $m = 475 \text{ t}, v = 360 \frac{\text{km}}{\text{h}}, F = 250 \text{ kN}, s_{\min} = ?, P_{\text{sr}} = ?$

Други Њутнов закон за авион који убрзава гласи $ma = F_V - (F_{\text{tr}} + F_{\text{otpvaz}})$. С обзиром да сила трења и сила отпора ваздуха чине 5 % укупне вучне силе добијамо да је $ma = 0,95F_V$ (1), при чему је укупна вучна сила мотора $F_V = 4F$ (2). Замјеном (2) у (1) добијамо интензитет убрзања авиона $a = \frac{3,8F}{m}$ (3). Вријеме потребно авиону да из стања мировања убрза до брзине v износи $t_{\min} = \frac{v}{a}$ (4), а пут који при том убрзавању прелази је $s_{\min} = \frac{1}{2}at_{\min}^2$ (5). Замјеном (4) у (5) добијамо $s_{\min} = \frac{v^2}{2a}$ (6). На основу (6) и (3) долазимо до минималне дужине писте $s_{\min} = \frac{mv^2}{7,6F}$ односно $s_{\min} = 2,5 \text{ km}$.

Средња брзина кретања авиона је $v_{\text{sr}} = \frac{s_{\min}}{t_{\min}}$ што уз (4) и (6) постаје $v_{\text{sr}} = \frac{v}{2}$ (7), па је укупна средња снага коју развијају мотори при полијетању авиона једнака: $P_{\text{sr}} = F_V v_{\text{sr}}$ (8). Замјеном (2) и (7) у (8) добијамо $P_{\text{sr}} = 2Fv$ односно $P_{\text{sr}} = 50 \text{ MW}$.

(б) $S = ?$

Површину крила авиона S можемо одредити као двоструки збир површина два правоугла троугла, односно $S = 2(S_1 + S_2)$. Један троугао има катете $17,67 \text{ m}$ и $\frac{79,75-7,14}{2} \text{ m}$ па је његова површина једнака $S_1 = 320,75 \text{ m}^2$, а други троугао има катете $3,98 \text{ m}$ и $\frac{79,75-7,14}{2} \text{ m}$ па је његова површина једнака $S_2 = 72,25 \text{ m}^2$. На овај или неки други начин добијамо $S = 786 \text{ m}^2$.

(в) $S = 845 \text{ m}^2, m = 475 \text{ t}, \Delta p = ?$

Да би се авион одржавао у ваздуху сила динамичког узгона мора бити једнака тежини авиона, односно $F_{\text{du}} = mg$ (9). Ако је разлика у притиску испод и изнад крила Δp слиједи да је сила која дјелује на крила авиона вертикално увис једнака: $F_{\text{du}} = \Delta p S$ (10). Замјеном (9) у (10) добијамо да је $\Delta p = \frac{mg}{S}$ односно $\Delta p = 5,5 \text{ kPa}$.

(г) $v = 900 \frac{\text{km}}{\text{h}}, v_{\text{ispod}} = v, v_{\text{iznad}} = 1,2v, \rho = \rho(h), \Delta p = 4,25 \text{ kPa}, h = ?$

На основу Бернулијевог закона можемо одредити густину ваздуха на висини h : $\rho = \frac{2\Delta p}{v_{\text{iznad}}^2 - v_{\text{ispod}}^2}$ односно по услову за брзине струјања ваздуха дате у тексту задатка $\rho = \frac{\Delta p}{0,22v^2}$. Замјеном бројних вриједности у претходни израз добијамо $\rho = 0,31 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Ако сада погледамо графички приказану зависност $h = h(\rho)$ можемо прочитати да је висина којој одговара добијена вриједност густине ваздуха једнака $h = 12,5 \text{ km}$.

(д) $v_0 = 270 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $t_3 = 3 \text{ s}$, $t_7 = 7 \text{ s}$, $\Delta s_{37} = 240 \text{ m}$, $a_{\text{stop}} = ?$, $s_{\text{stop}} = ?$

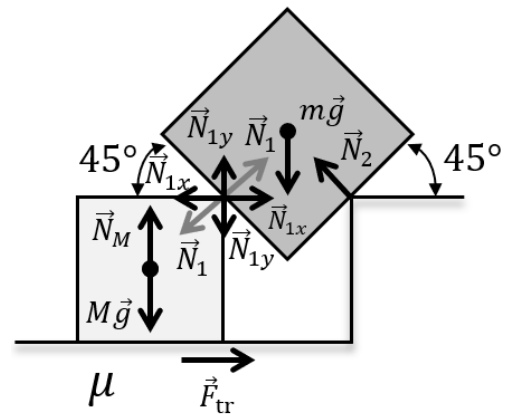
Пут који авион пређе за вријеме t_3 једнако је: $s_3 = v_0 t_3 - \frac{1}{2} a_{\text{stop}} t_3^2$ (11), а за вријеме t_7 : $s_7 = v_0 t_7 - \frac{1}{2} a_{\text{stop}} t_7^2$ (12). Од тренутка t_3 до тренутка t_7 авион прелази пут $\Delta s_{37} = s_7 - s_3$ (13). Замјеном

(11) и (12) у (13) добијамо да је $a_{\text{stop}} = \frac{2[v_0(t_7 - t_3) - \Delta s_{37}]}{t_7^2 - t_3^2}$ односно $a_{\text{stop}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Вријеме потребно авиону да успори од брзине v_0 до брзине v износи $t_{\text{stop}} = \frac{v_0 - v}{a_{\text{stop}}}$ (14), а пут који при том успорењу прелази је

$s_{\text{stop}} = v_0 t_{\text{stop}} - \frac{1}{2} a_{\text{stop}} t_{\text{stop}}^2$ (15). Замјеном (14) у (15) добијамо $s_{\text{stop}} = \frac{v_0^2 - v^2}{2a_{\text{stop}}}$ односно $s_{\text{stop}} = 900 \text{ m}$.

3. $M = 3 \text{ kg}$, $m = 2 \text{ kg}$, $\mu = ?$

На слици су приказане силе које дјелују на блокове: N_1 је сила којом један блок дјелује на други, N_2 је сила којом горњи блок и степеник дјелују једно на друго и N_M је сила реакције подлоге која дјелује на доњи блок. Услови равнотеже горњег блока у вертикалном и хоризонталном правцу су: $mg = \frac{N_1}{\sqrt{2}} + \frac{N_2}{\sqrt{2}}$ и $\frac{N_1}{\sqrt{2}} = \frac{N_2}{\sqrt{2}}$. Слиједи $N_1 = N_2$ и $mg = N_1 \sqrt{2}$ (1). Услови равнотеже доњег блока у вертикалном и хоризонталном правцу су: $Mg + \frac{N_1}{\sqrt{2}} = N_M$ (2) и $\frac{N_1}{\sqrt{2}} = F_{tr}$ (3) гдје је $F_{tr} = \mu N_M$ (4). Замјеном (2) у (4) и уз (3) долазимо до $\frac{N_1}{\sqrt{2}} = \mu \left(Mg + \frac{N_1}{\sqrt{2}} \right)$ (5). Из (1) и (5) се добија $\frac{mg}{2} = \mu \left(Mg + \frac{mg}{2} \right)$ односно $\mu = \frac{m}{2M+m}$. Уврштавањем бројних вриједности израчунавамо тражени коефицијент трења $\mu = 0,25$.



4. $h_0 = 2R$, $v_0 = \sqrt{5gR}$, $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mu_2 = 0,5$, $R = 30 \text{ cm}$, $h = ?$

Механичка енергија коју куглица има у почетном тренутку је $E_0 = E_k + E_p$ (1), гдје су $E_k = \frac{1}{2} m v_0^2$ (2) и $E_p = mgh_0$ (3). У тренутку када се куглица заустави на другој стрмој равни она има само потенцијалну енергију $E' = mgh$ (4). Дио почетне енергије се утроши на савладавање силе трења, односно важи $E_0 - E' = A_{tr}$ (5). Како при кретању куглице по кружној петљи нема трења, слиједи да је укупан рад силе трења једнак: $A_{tr} = A_{tr}^{(1)} + A_{tr}^{(2)} + A_{tr}^{(3)}$ (6)

$A_{tr}^{(1)} = F_{tr}^{(1)} s_1$ (7) гдје је $F_{tr}^{(1)} = \frac{1}{2} mg \mu_1$ (8) сила трења на првој стрмој равни и $s_1 = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$ (9), $A_{tr}^{(2)} = F_{tr}^{(2)} 2R$ (10) гдје је $F_{tr}^{(2)} = mg \mu_2$ (11) сила трења на хоризонталној подлози и $A_{tr}^{(3)} = F_{tr}^{(3)} s_3$ (12) гдје је $F_{tr}^{(3)} = \frac{\sqrt{3}}{2} mg \mu_1$ (13) сила трења на другој стрмој равни и $s_3 = 2h$ (14). Замјеном (1), (4) и (6) у (5) и на основу (2), (3), (7), ..., (14) добијамо следећу једнакост $\frac{1}{2} m v_0^2 + 2mgR - mgh = \frac{1}{2} mg \mu_1 \frac{4R\sqrt{3}}{3} + mg \mu_2 2R + \frac{\sqrt{3}}{2} mg \mu_1 2h$ одакле слиједи: $h = R$ или уз бројне вриједности $h = 30 \text{ cm}$.

5. $V = 100 \text{ l} = 0,1 \text{ m}^3$, $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_{\text{ref}} = 90 \text{ }^\circ\text{C}$, $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$, $e_0 = ?$, $P(t) = ?$, $\tau = ?$

(а) Вриједност грешке у почетном тренутку се одређује из израза $e_0 = t_{\text{ref}} - t_0$ и износи $e_0 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$.

(б) Снага гријача је 2000 W , ако је вриједност грешке $e = t_{\text{ref}} - t > 15 \text{ }^\circ\text{C}$ (1). Из неједнакости (1) добијамо да је $t < 75 \text{ }^\circ\text{C}$. Снага гријача је 1000 W , ако је вриједност грешке $e = t_{\text{ref}} - t > 5 \text{ }^\circ\text{C}$ (2) и $e = t_{\text{ref}} - t \leq 15 \text{ }^\circ\text{C}$ (3). Из неједнакости (2) и (3) добијамо да је $75 \leq t < 85 \text{ }^\circ\text{C}$. Снага гријача је 500 W , ако је вриједност грешке $e = t_{\text{ref}} - t > 0 \text{ }^\circ\text{C}$ (4) и $e = t_{\text{ref}} - t \leq 5 \text{ }^\circ\text{C}$ (5). Из неједнакости (4) и (5) добијамо да је $85 \text{ }^\circ\text{C} \leq t < 90 \text{ }^\circ\text{C}$. И коначно снага гријача једнака је: 0 W , ако је

$e = t_{\text{ref}} - t \leq 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ (6). Из неједнакости (6) добијамо да је $t \geq 90 \text{ } ^\circ\text{C}$. Уколико објединимо све добијене резултате можемо писати:

$$P(t) = \begin{cases} 0 \text{ W}, & t \geq 90 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 500 \text{ W}, & 85 \text{ } ^\circ\text{C} \leq t < 90 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 1\,000 \text{ W}, & 75 \text{ } ^\circ\text{C} \leq t < 85 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 2\,000 \text{ W}, & t < 75 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases}$$

(в) Јасно је да ће се вода загријавати у три етапе у зависности од снаге гријача па ће њено укупно вријеме загријавања бити $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ (7), гдје је τ_1 вријеме потребно да се вода загрије од температуре t_0 до $t_1 = 75 \text{ } ^\circ\text{C}$, τ_2 вријеме потребно да се вода загрије од температуре t_1 до $t_2 = 85 \text{ } ^\circ\text{C}$ и τ_3 вријеме потребно да се вода загрије од температуре t_2 до $t_{\text{ref}} = 90 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Количина топлоте Q_x коју гријач снаге P_x ослободи за неко вријеме τ_x је $Q_x = P_x \tau_x$ (8). Према једначни топлотне равнотеже важи $Q_x = mc\Delta t_x$ (9), гдје је $m = \rho V$ (10) маса воде у резервоару. Изједначавањем

(8) и (9) и уз (10) добијамо да је $\tau_x = \frac{\rho V c \Delta t_x}{P_x}$ (11). Сада је на основу (11) лако одредити тражена времена:

$\tau_1 = \frac{\rho V c (t_1 - t_0)}{2\,000 \text{ W}}$ тј. $\tau_1 = 11\,550 \text{ s}$ (12), $\tau_2 = \frac{\rho V c (t_2 - t_1)}{1\,000 \text{ W}}$ тј. $\tau_2 = 4\,200 \text{ s}$ (13) и $\tau_3 = \frac{\rho V c (t_{\text{ref}} - t_2)}{500 \text{ W}}$ тј. $\tau_3 = 4\,200 \text{ s}$ (14). Замјеном (12), (13) и (14) у (7) добијамо да је вријеме потребно да се вода загрије $\tau = 19\,950 \text{ s} = 5 \text{ h } 32 \text{ min } 30 \text{ s}$.