27. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (15.мај 2021)

IV РАЗРЕД

1. Апсорпционе и емисионе линије у Балмеровој серији могу се одредити коришћењем Балмерове формулуе

$$\lambda = B\frac{m^2}{m^2-4},$$

где је B константа коју треба одредити и m је цијели број ($m > 2$).

а) Одредити димензију константе B;

б) Користећи Боров модел атома израчунати константу B;

в) Која таласна дужина одговара Балмер α линији;

г) Наћи минималну и максималну таласну дужину из Балмерове серије;

д) Генерализацијом Балмерове формуле показати да се само Балмерова серија налази у видљивом дјелу спектра (380-760nm);

ђ) Верификовати виријални теорем који поставља везу између кинетичке и потенцијалне енергије у затвореном систему са привлачним потенцијалом:

$$T = \frac{-1}{2}V?$$

Потребне констатне: брзина свјетлости $c = 3\cdot10^8\ m/s$, Планкова

константа $h = 6.626\cdot10^{-34} Js$и Ридбергова констатна $R = 1.097\cdot10^7 m^{-1}$.

2. Халејева комета је видљива са Земље у просјеку сваких 76.1 година. Ако ексцентрицитет Халејеве орбите износи 0.967 одредити максималну удаљеност Халејеве комете од Сунца. Напомена: У астрономији за мјерење дужине често се користи астрономска јединица (AU) једнака просјечној удаљености Земље од Сунца и износи приближно $150\cdot10^6\ km$.

3. У овом задатку бавићемо се једначиом ракете, тј. једначином Циолковског. Ракета добија брзину тако што избацује гориво масе dm_g брзином u у односу на ракету. Маса избаченог горива по јединици времена је константна. На ракету додатно дјелује и сила земљине теже. Ради једноставности узети да је убрзање земљине теже константно и износи $g = 9.81\text{m}/s^2$. Користећи Њутнове законе одредити једначину кретања ракете. Подсјетимо да се сагоријевањем горива смањује и маса ракете. Укупна маса ракете са горивом износи $m_0 = 1600\text{kg}$, док маса горива износи $m_g = 1500\text{kg}$. Брзина избацивања горива из ракете је $u = 3000\ m/s$. За које вријеме ракета мора потрошити гориво да би остала у Земљиној орбити. Потребне коснтанте: маса Земље $M = 5.957\cdot10^{24}\text{kg}$, гравитациона константа $G = 6.67408\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$, полупречник Земље $R = 6371\text{km}$. Напомена: Приликом извођења једначине, узети у обзир да се производ двије инфинитиземалне величине може занемарити.

4. Цијев цилиндричног облика и полупречника R је испуњена негативним наелектрисањем запреминске густине ρ. Релативна диелеткрична пермитивност материјала којом је испуњена цијев је ε_r . Одредити јачину електричног поља и електрични потенцијал унутар цијеви.
Сноп честица налектрисања e улази у цијев брзином v_t паралелној оси цијеви. Под претпоставком да честице улазе у цијев равномјерно по цијелој површини попречног пресјека, одредити:

а) Предзнак наелектрисаних честица које ће омогућити осцилације унутар цијеви;

б) Аргументовати зашто ће се све честице, независно од радијалјне удаљености од осе цилиндра на којој улазе у цијев, истовремено наћи на оси цилиндра и послије ког времена од уласка у цијев ће сноп бити фокусиран на оси цилиндра;

в) Наћи максималну и минималну брзину коју честице могу посједовати унутар цијеви.

5. Полицији је јављено да се десило убиство. Да би одредила тачно вријеме смрти полиција је изашла на увиђај и извршила мјерење температуре на лешу. Забиљежене вриједности су наведене у табели испод. Користећи Њутнов закон хлађења

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

одредите када се смрт десила. У једначини $\frac{dT}{dt}$ представља промјену температуре у односу на вријеме, T је тренутна температура тјела, док је T_a температура амбијента и k је позитивна константа која зависи од тијела које се хлади. За просјечну температуру амбијента узети $T_a = 20°\mathrm{C}$, док просјечна температура људског тијела износи $T_0 = 36°\mathrm{C}$.

t[h]	T [deg C]
12:30	21.97
13:30	21.42
14:30	21.04
15:30	20.76
16:30	20.59

Задатке припремио: Зоран Шукурма.
Рецензент: Проф. др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА IV РАЗРЕД

1.

а) B има димензију дужине: $[B] = L$.

б) У Боровом моделу n-ти енергетски ниво има енергију $E_n = -E_0/n^2$ $(E_0 = hcR = 13{,}6eV)$. Како се ради о Балмеровој серији $(n = 2)$, прелазак са енергетског нивоа m $(m > 2)$ на други енергетски ниво захтјева енегију $\mathit{\Delta}E = \frac{hc}{\lambda} = E_m - E_2 = \frac{-E_0}{m^2} + \frac{E_0}{4} = E_0 \frac{m^2-4}{4m^2}$,

одакле слиједи $\lambda = \frac{4hc}{E_0} \frac{m^2}{m^2-4} \rightarrow B = \frac{4hc}{E_0} = 364.9\mathrm{nm}$.

в) Балмеr α линија представља прву могућу транзицију, и у случају Балмерове серије је $m = 3$, тако да је $\lambda = \frac{9}{5} B = 656.8\mathrm{nm}$.

г) Максимална таласна дужина је управо Балмер α линија, па преама томе $\lambda_{\max} = \frac{9}{5} B = 656.8\mathrm{nm}$, док минимална таласна дужина одговара $m = \infty$ прелазу, за који важи $\lambda_{\min} = B = 364.9\mathrm{nm}$.

д) Балмерова серија одговара прелазима са $n = 2$. Балмерова серија се може генерализовати за било коју серију $\lambda = n^2 B_0 \frac{m^2}{m^2-n^2}$ гдје је константа

$B_0 = h\,c/E_0 = 91.22\mathrm{nm}$. Лајманова серија $(n = 1)$ одговара таласним дужинама $\lambda_{\min} = B_0 = 91.2\mathrm{nm}$ - $\lambda_{\max} = 4\,B_0/3 = 121.6\mathrm{nm}$ и самим тим се налази у видљивом дјелу спектра електромагнетног зрачења. Таласне дужине Пашенове серије $(n = 3)$ налази се у оквиру $\lambda_{\min} = 9B_0 = 821\mathrm{nm}$ - $\lambda_{\max} = 144\,B_0/7 = 1876.6\mathrm{nm}$. Из тога се може закључити да је Пашенова серија изван видљивог спектра. Остале серије са још већим n имаће још веће таласне дужине тако да само Балмерова серија остаје у видљивом дјелу спектра.

ђ) Израз за кинетичку и потенцијалну енергију електрона у Боровом моделу, те израз за центрипеталну силу која је једнака Кулоновој привлачној сили гласе:

$T = \frac{mv^2}{2}, V = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R}, \frac{mv^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2}$.

Из ових једначина добија се: $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} = \frac{-1}{2} V$.

2. Користећи трећи Кеплеров закон $\frac{a_{\mathrm{h}}^3}{T_{\mathrm{h}}^2} = \frac{a_{\mathrm{z}}^3}{T_{\mathrm{z}}^2}$, слиједи $a_{\mathrm{h}} = a_{\mathrm{z}} \left(\frac{T_{\mathrm{h}}}{T_{\mathrm{z}}}\right)^{2/3}$, тј.

$a_{\mathrm{h}} = 1\mathrm{AJ} \cdot 76.1^{2/3} = 17.96\mathrm{AJ}$. Даље је познато да је Халејев комет на максималној удаљености од Сунца када се налазу у афелу. Према томе максимална удаљеност је

$d_{\max} = a + c = a + \epsilon a = a(1 + \epsilon) = 1.967a = 35.49\mathrm{AJ}$. АЈ је астрономска јединица - просјечно растојање Земље од Сунца и износи приближно $150 \cdot 10^6\mathrm{km}$.

3. Извођење једначине Циолковског: нека је тренутна маса ракете m и брзина ракете v. Након инфинитиземално кратког временског интервала dt маса ракете је $m - dm_g$ док је брзина ракете $v + dv$. За то вријеме из ракете је избачено гориво масе dm_g брзином u у односу на ракету, т.ј. брзином $v - u$ у односу на Земљу. Почетни импулс је $p_i = mv$, док је финални импулс $p_f = \left(m - dm_g\right)(v + dv) + dm_g(v - u)$.

Користећи други Њутнов закон добија се:

$$p_f - p_i = -mgdt$$
$$mv + mdv - dm_g v - dm_g dv + dm_g v - dm_g u - mv = -mgdt$$
$$mdv = dm_g u - mgdt$$
$$dv = \frac{-dm}{m} u - gdt$$
$$\int_0^v d\,v = -u \int_{m_0}^{m_0 - m_g} \frac{dm}{m} - g \int_0^t d\,t$$
$$v = u\ln \frac{m_0}{m_0 - m_g} - gt.$$

Да би ракета остала у орбити планете, постигнута брзина ракете мора да буде већа или једнака првој космичкој брзини: $v = u\ln \frac{m_0}{m_0 - m_g} - gt \geq \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Из посљедње једначине слиједи: $t \leq \frac{u\ln \frac{m_0}{m_0 - m_g} - \sqrt{\frac{GM}{R}}}{g} = 42.58s$. Ракета мора да потроши гориво у року од 42.58s да би остала у орбити планете.

4. Електрично поље је радијално и линије поља су усмјерене ка оси цијеви. Јачина електричног поља и електрични потенцијал могу се одредити помоћу Гаусовог теорема: $\oint \vec{E} \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \to E = \frac{\rho}{2\epsilon_0 \epsilon_r} r$.

Помоћу израза за електрично поље и избором референтне тачке за електрични потенцијал $\phi(0) = 0$, добија се: $\phi(r) = \int_0^r E\,(r')\mathrm{d}r' = \frac{\rho}{4\epsilon_0 \epsilon_r} r^2$.

а) Да би честице могле да осцилују унутар цијеви, оне морају да буду привучене ка оси цијеви, из чега се може закључити да честице морају бити позитивно наелектрисане.

б) За мале осцилације све честице ће се наћи на оси цилиндра након четвртине периода (независно од удаљености од осе цијеви на којој честице улазе у цијев) јер период малих осцилација не зависи од амплитуде. Вријеме након кога су честице фокусиране износи $t = T/4$. Једначина хармонијског осцилатора унутар цијеви је $m\ddot{r} + eE(r) = 0$, одакле слиједи $\ddot{r} + \frac{\rho r}{2m\epsilon_0 \epsilon_r} = 0 \to \omega^2 = \frac{\rho e}{2m\epsilon_0 \epsilon_r}$ па је тражено вријеме:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m\epsilon_0 \epsilon_r}{\rho e}}.$$

в) Честице које улазе у цијев на оси цилиндра неће вршити осцилације, те је укупна брзина тих честица једнака тангенцијалној брзини, т.ј. $v_{\min} = v_{\mathrm{t}}$. С друге стане честице које улазе у цијев на растојању R од осе цилиндра имаће највећу брзину и то у тренутку када се налазе на оси цијеви - када је укупна енергија једнака кинетичкој енергији честице. Кориштењем израза за електрични потенцијал или закључујући да потенцијална енергија има форму $V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$ јер се ради о хармонијском потенцијалу налазимо: $\frac{1}{2} m v_{\mathrm{r}}^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \to v_{\mathrm{r}} = \omega R$, па је максимална брзина честица у цијеви: $v_{\max} = \sqrt{v_{\mathrm{r}}^2 + v_{\mathrm{t}}^2} = \sqrt{v_{\mathrm{t}}^2 + \frac{\rho e R^2}{2m\epsilon_0 \epsilon_r}}$.

5. Прво је потребно рјешити Њутнову једначину хлађења, то јесте наћи функцију температуре тијела у односу на вријеме $T(t)$.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$
$$\frac{dT}{T - T_a} = -kdt$$
$$\int \frac{dT}{T - T_a} = -k \int dt$$
$$\ln(T - T_a) = -kt + C$$
$$T = T_a + Ce^{-kt}$$

Из посљесње једначине може се одредити вријеме када је температаура тијела била једнака нормалној тјелесној температури $T_0 = 36°\mathrm{C}$. Оно износи $t = \frac{-1}{k} \ln \frac{T_0 - T_a}{C}$. Међутим неопходно је претходно одредити константе k и C. То се може одредити линеаризацијом функције $T(t)$: $\ln(T - T_a) = -kT + C$.

Цртањем графика могу се процјенити нагиб криве k и одсјечак на оси ордината C. Ученик може користити метод најмањих квадрата или графички метод да би одредио коефицијенте. Чак је могуће процијенти коефицијенте и на основу само двије тачке (у том случају одузети 2 бода). Линеарни фит функције показан је на графику испод. Добијени коефицијенти су

$k = 0.30364\mathrm{h}^{-1}$и
$C = 0.66045°\mathrm{C}$.

Из једначине за вријеме добија се $t \approx -10.5\mathrm{h}$, из чега се закључује да се смрт десила 10.5h прије почетка мјерења, то јест у 2 сата ноћи (02:00h).