

**26. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (6. април 2019)**

II РАЗРЕД

1. Два једнака суда су раздвојена непокретном преградом. У почетном тренутку у једном суду је смјеша водоника и хелијума, а у другом је вакуум. Преграда је пропусна за хелијум. Након успостављања равнотеже, притисак у првом суду је опао за 10 %. Наћи однос маса хелијума и водоника у смјешу у почетном тренутку. Температуру сматрати константном. Моларна маса водоника је $M_1 = 2 \text{ g/mol}$, а хелијума $M_2 = 4 \text{ g/mol}$.

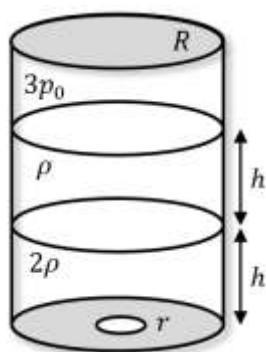
2. У затвореном, вертикалном, цилиндричном суду (слика 1), полупречника основе R , налазе се двије течности различитих густина под притиском од три атмосфере ($3p_0$). Густина једне течности је ρ , а друге 2ρ . Дебљине слојева обе течности су једнаке и износе h . На дну суда се налази кружни отвор полупречника r . Одредити брзину којом доња течност истиче из суда. Атмосферски притисак је p_0 .

3. У тјеменима непроводне коцке су распоређене мале наелектрисане куглице као што је то приказано на слици 2. Количине наелектрисуња на свакој од куглица су умношци јединичног наелектрисуња q и означене су на слици. Ако је дужина ивице коцке a , одредити напон између тачака M и N . Диелектрична константа вакуума је ϵ_0 , а куглице се могу сматрати тачкастим наелектрисуњима.

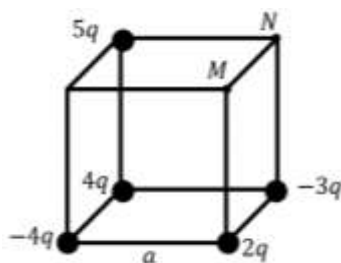
4. Планета масе m креће се по елиптичној орбити око Сунца масе M . Најмање и највеће растојање од Сунца је r_{\min} и r_{\max} .

- а) Одредити момент импулса планете у односу на центар Сунца.
- б) Колика је брзина планете у најудаљенијем положају?
- в) Колика је укупна енергија планете?

5. Колико ће нас коштати добијање 10 kg леда од воде, у кућном фрижидеру, сматрајући да он ради по идеалном циклусу? Собна температура (температура воде) износи 27°C , а фреон (радно тијело) је охлађен до -10°C . Цијена 1 kWh електричне енергије износи $0,30 \text{ KM}$. Специфична топлота воде је $c = 4,2 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$, а специфична топлота топљења леда $\lambda = 0,33 \text{ MJ/kg}$. Тачка топљења леда $T_0 = 273 \text{ K}$.



Слика 1



Слика 2

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА П РАЗРЕД

1. У почетном тренутку за водоник и хелијум важе једначине стања: $p_1V = \frac{m_1}{M_1}RT$ и

$$p_2V = \frac{m_2}{M_2}RT. \text{ Њиховим сабирањем } pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT \quad (1),$$

гдје је $p = p_1 + p_2$ притисак гасне смјеше у почетном тренутку. Послије успостављања равнотеже хелијум се равномерно распоредио у оба суда, па је у првом суду остала половина првобитне количине хелијума а притисак се смањило за 10%, тј.

$$0,9pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{2M_2} \right) RT \quad (2). \text{ Дијелењем једначина (1) и (2): } \frac{pV}{0,9pV} = \frac{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{2M_2} \right) RT}.$$

Рјешење ове једначине је $\frac{m_1}{m_2} = 2$. Према томе, маса водоника у суду је два пута већа од масе хелијума.

2. Бернулијева једначина за течност густине 2ρ написана за раздвојну површ између двије течности и за кружни отвор гласи: $p_1 + (2\rho)gh + \frac{1}{2}(2\rho)v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}(2\rho)v_2^2$ (1), гдје су статички притисци p_1 и p_2 , $p_1 = 3p_0 + \rho gh$ (2) и $p_2 = p_0$ (3). Једначина континуитета за исте пресеке је $S_1v_1 = S_2v_2 \Rightarrow R^2pv_1 = r^2pv_2 \Rightarrow R^2v_1 = r^2v_2$ (4). Замјеном (2), (3) и (4) у (1) и рјешавањем једначине по v_2 добија се брзина којом течност густине 2ρ истиче из суда

$$v_2 = \sqrt{\frac{R^4(2p_0 + 3\rho gh)}{\rho(R^4 - r^4)}}.$$

3. Напон између тачака M и N је $U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N$ (1). Потенцијал у тачки M једнак је алгебарској суми свих потенцијала у тој тачки који потичу од сваког појединачног наелектрисања, тј. $\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{a} + \frac{-4q}{a} + \frac{-3q}{a} + \frac{5q}{a} + \frac{4q}{D} \right)$. Аналогно важи и за тачку N ,

$\varphi_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-3q}{a} + \frac{5q}{a} + \frac{2q}{d} + \frac{4q}{d} + \frac{-4q}{D} \right)$, гдје је $d = a\sqrt{2}$ мала, а $D = a\sqrt{3}$ велика дијагонала

коцке. На основу претходног добијамо: $\varphi_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$ (2) и

$\varphi_N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$ (3). Замјеном израза (2) и (3) у (1) слиједи да је

$$U_{MN} = \frac{2q}{\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{q(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{3\pi\epsilon_0 a}.$$

4. а) За кретање планете у гравитационом пољу Сунца важе закони одржања момента импулса и укупне енергије, тј. $L = mv_1 r_1 = mv_2 r_2$ (1) , $\frac{mv_1^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r_2}$ (2) . Ако

ставимо да је $r_1 = r_{\min}$ и $r_2 = r_{\max}$ из претходних једначина добија се момент импулса планете по елиптичној путањи у чијем једном фокусу се налази Сунце $L = m \sqrt{\frac{2\gamma M r_{\min} r_{\max}}{r_{\min} + r_{\max}}}$ (3). б)

Момент импулса у најудаљенијем положају је $L = mv_2 r_{\max}$ (4). Изједначавањем десних страна

(3) и (4) добија се брзина у најудаљенијем положају $v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M r_{\min}}{r_{\max} (r_{\min} + r_{\max})}}$ (5) .

Исти резултат се могао добити елиминацијом брзине v_1 из једначина (1) и (2).

в) Укупна енергија планете је иста у сваком положају, па се може писати

$E = E_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r_2}$, па након уврштавања (5) у претходни израз коначно добијамо

$$E = -\gamma \frac{mM}{r_{\min} + r_{\max}} .$$

5. Коефицијент корисног дејства фрижидера (расхладне машине) који ради по идеалном

циклусу $\eta = 1 - \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right| = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. У нашем случају $T_1 = 300 K$, а $T_2 = 263 K$. За добијање

$m = 10 kg$ леда из воде узете на собној температури T_1 треба одузети количину топлоте

$Q_2 = mc(T_1 - T_0) + m\lambda$, $Q_2 = 4434 kJ$. При томе је утрошак енергије

$W = Q_1 - Q_2 = Q_2 \left(\frac{Q_1}{Q_2} - 1 \right) = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)$, $W = 623,79 kJ$. Као је $1 kWh = 3600 kJ$, тада

$1 kJ = \frac{1 kWh}{3600}$. Утрошак енергије је $W = 623,79 \frac{1 kWh}{3600} = 0,173275 kW$, што нас кошта

$x = 0,173275 kW \cdot 0,30 \approx 0,05 KM$.