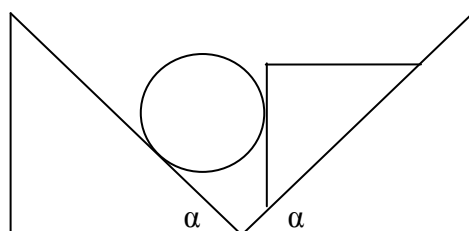


22. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (18. април 2015)

I РАЗРЕД

1. Низ двије идеално глатке стрме равни, које образују једнаке углове $\alpha = 45^\circ$ са хоризонталом, крећу се, међусобно се додирујући, цилиндар масе $m_1 = 5 \text{ kg}$ и клин масе $m_2 = 10 \text{ kg}$ (види слику). Одредити силу којом клин дјелује на цилиндар, ако је трење између клина и цилиндра занемариво.



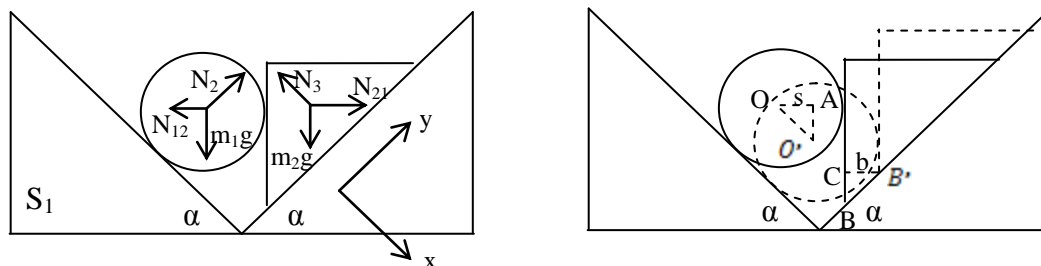
2. Одредити на којој је дубини испод површине Земље убрзање Земљине теже једнако убрзању на истој толикој висини изнад њене површине. Сматрати Земљу као хомогену куглу радијуса $R = 6372 \text{ km}$. При рјешавању задатка имати у виду да на тијело на дубини h не дјелује слој Земље са мање дубине, односно да се дјеловања појединих дијелова овог слоја на тијело поништавају.
3. Човјек је одвезлао из пристаништа низ воду $s_1 = 20 \text{ km}$ и вратио се назад послвије $t = 7 \text{ h}$. При повратку, на растојању $s_2 = 12 \text{ km}$ од пристаништа, срео је сплав који је поред пристаништа прошао у тренутку када је он кренуо на пут. Одредити брзину v_n којом је чамац пловио низ ријеку. Претпоставимо да је човјек све вријеме путовања веслао истом снагом у правцу тока ријеке и да је отпор кретању чамца константан.
4. Тарзан чија је маса $M = 90 \text{ kg}$ и Џејн $m = 50 \text{ kg}$ полазе „у живот“ лијаном дугом $l = 2 \text{ m}$ која је у почетку заклапала угао $\alpha = 60^\circ$ са вертикалом. У најнижој тачки путање, Џејн се „откачи“, али тако да је њена брзина у односу на земљу једнака нули. Колика је максимална висина грана на које Тарзан може да „слети“ када настави пут?
5. Замајац електричног уређаја, полупречника $r = 2 \text{ m}$ и момента инерције $I = 4,5 \cdot 10^3 \text{ kgm}^2$, има периферијску брзину $v = 130 \text{ m/s}$. При кочењу трењем, број обртаја замајца смањио се за 10%. Колики је рад силе трења?

Задатке припремила: Драгана Маливук Гак

Рецензент: проф. др Сениша Игњатовић, ПМФ Бања Лука

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА I РАЗРЕД

1.



1. $\alpha = 45^\circ$ $m_1 = 5\text{kg}$ $m_2 = 10\text{kg}$

На цилиндар дјелују силе: сила Земљине теже $m_1\vec{g}$, нормална реакција од клина \vec{N}_{12} нормална реакција од стране равни \vec{N}_2 . На клин дјелују силе: сила теже $m_2\vec{g}$, нормална реакција од стране равни \vec{N}_3 , нормална реакција од цилиндра \vec{N}_{21} . По закону акције и реакције $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$, односно по интензитету $N_{12} = N_{21}$

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{N}_{12} + \vec{N}_2 + m_1\vec{g}$$

За кретања клина $m_2\vec{a}_2 = \vec{N}_3 + m_2\vec{g} + N_{21}$, пошто у систему нема трећа силе \vec{N}_2, \vec{N}_3 не утичу на кретање. Када се цилиндар помјера по стрмој равни S_1 за растојање s додирна површина цилиндар и клин ће се помјерити за b . Са слике се види да се $\triangle OO'A$ и $\triangle BB'C$ подударни, што значи да је $s = b$ пређени путеви клина и цилиндра су исти па је убрзање клина и у правцу x по интензитету једнако убрзању осе цилиндра у правцу x - осе,

$$m_1a = -\frac{\sqrt{2}}{2}N_{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}m_1g \quad m_2a = \frac{\sqrt{2}}{2}N_{12} - \frac{\sqrt{2}}{2}m_2g$$

Подијелимо ове двије једначине једну са другом

$$\frac{m_1a}{m_2a} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}N_{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}m_1g}{\frac{\sqrt{2}}{2}N_{12} - \frac{\sqrt{2}}{2}m_2g}; \text{ одатле } N_{12} = \frac{2m_1m_2g}{(m_1 + m_2)} \quad N_{12} = \frac{2 \cdot 5\text{kg} \cdot 10\text{kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{5\text{kg} + 10\text{kg}} = 65,4\text{N}$$

2. $R = 6372\text{km}$ маса Земље $M = \rho V$ $M = \rho \cdot \frac{4}{3}R^3\pi$ а запремина $V = \frac{4}{3}R^3\pi$

За убрзање на некој висини h важи: $Q = F_g$, $mg_h = \gamma \cdot \frac{mM}{(R+h)^2}$

$$g_h = \gamma \cdot \frac{M}{(R+h)^2} = \gamma \cdot \frac{\frac{4}{3}\rho\pi R^3}{(R+h)^2}$$

За привлачење тијела на дубини h одговоран је дио Земље полупречника $R - h$

Маса тог дијела Земље M' се може добити уз претпоставку да је густина Земље свуда

иста: $\rho = \frac{M'}{V'}$; $\frac{M}{V} = \frac{M'}{V'} \Rightarrow M' = \frac{M}{V} \cdot V'$ $M' = \frac{M \cdot \frac{4}{3}(R-h)^3\pi}{\frac{4}{3}R^3\pi}$ $M' = M \cdot \frac{(R-h)^3}{R^3}$

Како је на дубини h $g'_h = \gamma \frac{M'}{(R-h)^2}$; $g'_h = \frac{\gamma M \frac{(R-h)^3}{R^3}}{(R-h)^2} = \frac{\gamma \cdot M(R-h)}{R^3} = \frac{\gamma \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \cdot (R-h) \rho}{R^3}$

$g'_h = \frac{4}{3} \pi \cdot \gamma (R-h) \cdot \rho$ Из услова задатка $g'_h = g'_h$

$\gamma \cdot \frac{4}{3} \rho \pi \frac{R^3}{(R+h)^2} = \frac{4}{3} \pi \rho \gamma (R-h)$

$R^3 = (R+h)^2 \cdot (R-h) = (R^2 + 2Rh + h^2)(R-h)$ $R^3 = R^3 + 2R^2h + h^2R - R^2h - 2Rh^2 + h^3$
 $0 = R^2h - Rh^2 + h^3$ $0 = h(R^2 - Rh - h^2)$ $h_1 = 0$

$h^2 + Rh - R^2 = 0$ $h_{2,3} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2}$ $h_{2,3} = \frac{-R \pm \sqrt{5R^2}}{2}$ $h_{2,3} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$

$h_2 = \frac{-R - R\sqrt{5}}{2}$ $h_3 = \frac{-R + R\sqrt{5}}{2}$ $h_3 = 3938 \text{ km}$

3. $s_1 = 20 \text{ km}$ $t = 7 \text{ h}$ $s_2 = 12 \text{ km}$ $v_u = ?$

v_ϵ – брзина чамца у односу на ријеку

u – брзина тока ријеке

v_1 – брзина чамца у односу на обалу

Када се чамац креће низводно:

$v_1 = v_\epsilon + u$; $s_1 = (v_\epsilon + u) \cdot t_1$ $t_1 = \frac{s_1}{(v_\epsilon + u)}$

Када се чамац креће узводно: $v_2 = v_\epsilon - u$ $s_1 = (v_\epsilon - u) \cdot t_2$ $t_2 = \frac{s_1}{(v_\epsilon - u)}$

Укупно вријеме кретања чамца $t = t_1 + t_2$

Сплав се креће брзином ријеке $v_s = u$

$t = \frac{s_1}{v_\epsilon + u} + \frac{s_1}{v_\epsilon - u}$; $t = \frac{s_1(v_\epsilon - u) + s_1(v_\epsilon + u)}{(v_\epsilon + u)(v_\epsilon - u)}$; $t = \frac{2v_\epsilon s_1}{v_\epsilon^2 - u^2}$ (*)

t_3 – тренутак сусрета чамца и сплава $t_3 = s_2 / u$ $t_3 = t_1 + t'$

t' – вријеме кретања чамца узводно до сусрета $t' = \frac{s_1 - s_2}{v_\epsilon - u}$

$\frac{s_2}{u} = \frac{s_1}{v_\epsilon + u} + \frac{s_1 - s_2}{v_\epsilon - u} = \frac{s_1(v_\epsilon - u) + (s_1 - s_2) \cdot (v_\epsilon + u)}{v_\epsilon^2 - u^2}$; $v_\epsilon = \frac{u}{s_2} (2s_1 - s_2)$ (**)

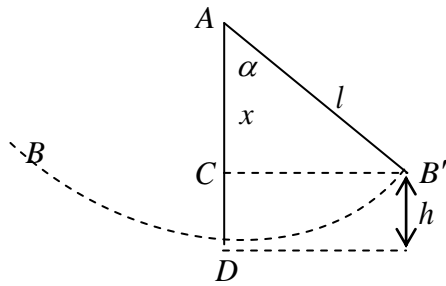
Брзину ријеке можемо израчунати ако у (*) уврстимо (**)

$u = \frac{(2s_1 - s_2) \cdot s_2}{2t(s_1 - s_2)}$ $u = 3 \text{ km/h}$

v_n брзина чамца у односу на обалу када се креће низ воду $v_1 = v_\epsilon + u = u \left(\frac{2s_1}{s_2} - 1 \right) + u$

$v_n = u \left(\frac{2s_1}{s_2} - 1 + 1 \right) = u \frac{2s_1}{s_2}$, $v_n = 10 \text{ km/h}$

4. $M = 90\text{kg}; \quad m = 50\text{kg}; \quad \alpha = 60^\circ; \quad \ell = 2\text{m}$



Са слике видимо да је $\triangle ABC$ правоугли, а $\triangle ABD$ једнакостранични, па тачка C пада на половину странице, односно $x = \frac{\ell}{2}$ $h = \ell - x = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$. У најнижој тачки брзина Тарзана и

Џејн $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl/2} \quad v = 4,4294 \frac{m}{s}$

Из закона одржања импулса брзина Тарзана након након што се Џејн откачила $p_1 = p_2$

$$Mv_1 = (m+M) \cdot v \quad v_1 = \frac{(m+M) \cdot v}{M} = \left(\frac{m}{M} + 1\right)v \quad v_1 = 6,89 \frac{m}{s} \quad \text{Да би се добила висина}$$

на коју се може попети Тарзан, примјењује се закон одржања енергије на тачке D и B' : $E_{k_2} + E_{p_2} = E_{k_3} + E_{p_3}$

$$\frac{Mv_1^2}{2} + 0 = 0 + Mgh; \quad \frac{Mv_1^2}{2} = Mgh; \quad h = \frac{v_1^2}{2g} \quad h = \frac{\left(6,89 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}; \quad h \approx 2,42\text{m}$$

5. $r = 2\text{m}; \quad I = 4,5 \cdot 10^3 \text{kgm}^2; \quad v = 130\text{m/s}; \quad \mu = 10\% = 0,1 \quad A = ?$

$$v = \omega \cdot r \quad \omega = \frac{v}{r}; \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2; \quad 10\% \omega_1 = \omega_1 - \omega_2; \quad 0,1\omega_1 = \omega_1 - \omega_2$$

$$\omega_2 = \omega_1 - 0,1\omega_1; \quad \omega_2 = 0,9\omega_1$$

$$E_k = \frac{I}{2} \omega^2 \quad \Delta E_k = E_{k_1} - E_{k_2} \quad \Delta E_k = \frac{I}{2} \omega_1^2 - \frac{I}{2} \omega_2^2 = \frac{I}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

Рад силе трења једнак је промјени кинетичке енергије

$$A = \Delta E_k \quad (3) \quad A = \frac{1}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \quad A = \frac{1}{2} (\omega_1^2 - (0,9\omega_1)^2) \quad A = \frac{1}{2} (1 - (0,9)^2) \cdot \omega_1^2$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 0,19 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 \quad A = \frac{1}{2} \cdot 0,19 \cdot \frac{v^2}{r^2} \quad A = \frac{4,5 \cdot 10^3 \text{kgm}^2 \cdot 0,19 \cdot \left(130 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot (2\text{m})^2} \quad A = 1806187,5\text{J}$$

$$A \cong 1,8\text{MJ}$$