

POLINOMI

1. MALO TEORIJE

1.1. Rastavljanje/faktorisanje algebarskih izraza.

- Izdvajanje zajedničkog faktora $Ax - Ay = A(x - y)$
- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$
- dopuna do potpunog kvadrata; faktORIZACIJA $ax^2 + bx + c$
- $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- Uvijek vrijedi

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + A^{n-k}B^{k-1} + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

- Ako je n neparan prirodan broj, onda vrijedi

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

- Binomna formula

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n.$$

1.2. Osnovni pojmovi o polinomima. Polinom kao izraz: Stepen promjenjive x je $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ puta}}$.

Monom u promjenljivoj je izraz $c \cdot x^n$, gdje je c konstanta. Polinom $p(x)$ po x je zbir konačno mnogo monoma u promjenljivoj x . Običaj je da u polinomu monome "poredamo" tako da stepeni od x opadaju ili rastu:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Brojevi a_0, a_1, \dots, a_n su koeficijenti polinoma, a_0 je slobodan član, a a_n (koji mora biti različit od nule) je vodeći član (najstariji koeficijent). Koeficijenti mogu biti cijeli brojevi, racionalni, realni (čak i kompleksni) i to je važno za svojstva polinoma.

Ukratko, polinom $p(x)$ je izraz dobijen "kombinovanjem" stepena x : $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Polinom kao funkcija

Za svaki realni broj x možemo izračunati vrijednost polinoma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Tako polinom možemo shvatiti i kao realnu funkciju $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kako je polinom neprekidna funkcija, grafik polinoma se može nacrtati u jednom potezu. Nula polinoma je broj α za koji je $p(\alpha) = 0$, odnosno tačka na x -osi u kojoj grafik siječe x -osu.

- (1) Skicirajte grafike polinoma $p(x) = x^n$ za $n \in \mathbb{N}$.
- (2) Nadjite primjer polinoma koji nema realnu nulu, to jest za sve x je $p(x) \neq 0$
- (3) Objasnite zašto svaki polinom neparnog stepena ima bar jednu realnu nulu (mjesto gdje grafik siječe x -osu)

Polinom kao niz: Kako je polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ određen svojim koeficijentima, nekada se polinom opisuje kao niz (a_0, a_1, \dots, a_n) .

Još nešto malo:

Polinom stepena nula je konstanta (i kao funkcija), polinom stepena jedan nazivamo laran (linearna funkcija). Polinom sa dva monoma nazivamo binom, a sa tri trinom. Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i koeficijenti uz iste stepene su jednaki.

2. DIJELJENJE POLINOMA. OSTATAK. NULA POLINOMA.

Theorem 2.1. *Neka su dati polinomi $p(x)$ i $q(x)$, pri čemu je $q(x) \neq 0$. Tada postoje polinomi $k(x)$ (količnik) i $r(x)$ (ostatak) takvi da je $p(x) = q(x)k(x) + r(x)$ i $st(r) < st(q)$.*

Polinomi $k(x)$ i $r(x)$ u prethodnoj teoremi su jedinstveni.

Theorem 2.2 (Bezuov stav). *Ostatak pri djeljenju polinoma $p(x)$ sa $x - \alpha$ je (konstanta) $p(\alpha)$. Specijalno, $p(x)$ je djeljiv sa $x - \alpha$ ako i samo ako je $p(\alpha) = 0$.*

3. POLINOMI SA CJELOBROJNIM KOEFICIJENTIMA

Ako su svi koeficijenti polinoma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ cijeli brojevi, kažemo da je to polinom sa cjelobrojnim koeficijentima. Ovi polinomi imaju neke lijepe osobine.

Theorem 3.1. *Neka je $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ polinom sa cjelobrojnim koeficijentima. Za svaka dva cijela broja a i b broj $p(a) - p(b)$ je djeljiv sa brojem $a - b$. Dalje, ako je cijeli broj m nula polinoma $p(x)$ onda m dijeli a_0 (slobodan član).*

4. OSNOVNI STAV ALGEBRE. FAKTORIZACIJA POLINOMA SA REALNIM KOEFICIJENTIMA.

Da bi polinom $p(x) = x^2 + 1$ imao nulu uvedemo novi broj (imaginarnu jedinicu) i za koji vrijedi $i^2 = -1$. Skup kompleksnih brojeva definišemo sa $\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Theorem 4.1 (Osnovni stav algebre). *Neka je $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ nekonstantan polinom (stepena bar jedan) s realnim koeficijentima. Tada postoji kompleksan broj z koji je nula polinoma $p(x)$.*

Posljedica: Polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ sa realnim koeficijentima možemo na jedinstven način napisati kao

$$p(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n),$$

gdje su z_1, z_2, \dots, z_n **neobavezno različiti** kompleksni brojevi.

Broj α je nula višetrukosti (multipliciteta) m ako $(x - \alpha)^m$ dijeli $p(x)$, a $(x - \alpha)^{m+1}$ ne dijeli $p(x)$. Sada možemo reći da polinom stepena n ima tačno n nula (brojeći multiplicitet) u kompleksnim brojevima.

Ako je $z = a + bi$ nula polinoma $p(x)$, onda je i $\bar{z} = a - bi$ nula istog polinoma. Tako se u faktorizaciji polinoma $p(x)$ pojavi

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Posljedica: Polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ sa realnim koeficijentima možemo na jedinstven način napisati kao

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_t)(x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s).$$

Pri tome je $n = t + 2s$, polinom neparnog stepena ima bar jednu realnu nulu.

5. ZADACI SA ČASA

- (1) Rastavi $x^4 + 4$, $x^2 - 3x - 10$.
- (2) Koliko ima cijelih brojeva n takvih da je $4n^2 - 24n - 45$ prost prirodan broj?
- (3) Odrediti najveći cijeli broj n za koji je $n^3 + 100$ djeljiv sa $n + 10$.
- (4) Odredi različite prirodne brojeve $x < y < z$ za koje vrijedi

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 1986.$$

- (5) Koliko najviše ne-nula monoma ima proizvod dva trinoma?
- (6) Odrediti ostatak pri djeljenju polinoma $p(x) = x^{2025} + 2x^{2024} + \dots + 2025x + 2026$ sa $x^2 - 1$.
- (7) Zbir svih koeficijenata nekog polinoma je 2, a zbir koeficijenata uz neparne stepene je jednak zbiru koeficijenata uz parne. Koliki je ostatak pri dijeljenju tog polinoma sa $x^2 - 1$?
- (8) Dati su različiti cijeli brojevi a, b, c . Da li postoji polinom $p(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima takav da je $p(a) = b$, $p(b) = c$ i $p(c) = a$?
- (9) Polinom sa cjelobrojnim koeficijentima ima vrijednost 5 u četiri različita cijela broja. Da li taj polinom može da ima vrijednost osam u nekom cijelom broju?
- (10) Na tabli je napisan je polinom $p(x) = x^2 + 10x + 20$. U jednom potezu je dozvoljeno koeficijent uz x ili slobodan član povećati ili smanjiti za jedan (ne oba). Poslije nekoliko poteza, dobijen je polinom $x^2 + 20x + 10$. Dokaži da je u nekom trenutku polinom na tabli imao cjelobrojne nule.
- (11) Dati su različiti realni brojevi a_1, a_2, \dots, a_n i b_1, b_2, \dots, b_n . Tabela $n \times n$ je popunjena brojevima tako da u polju koje je u i -toj vrsti i j -toj koloni stoji $a_i + b_j$. Ako je proizvod brojeva u svakoj vrsti konstantan, dokaži da je i proizvod brojeva u svakoj koloni konstantan. Kada su proizvodi u vrstama jednaki proizvodu?

6. ZADACI ZA DOMAĆI

6.1. Lakši.

- (1) Pri deljenju polinoma P_1 polinomom $x^2 - 1$ dobija se ostatak x , a pri deljenju polinoma P_2 polinomom $x^2 - 1$ dobija se ostatak $x + 2$. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma $P_1 P_2$ polinomom $x^2 - 1$.
- (2) Ako su x_1, x_2 i x_3 rješenja jednačine $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a $P(x)$ neki polinom sa cjelobrojnim koeficijentima, dokaži da je $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)$ cijeli broj!
- (3) Za polinom sa cjelobrojnim koeficijentima vrijedi $P(0) = 2018$. Koliko najviše različitih cjelobrojnih nula ima P ?
- (4) Polinom $P(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima uzima vrijednosti ± 1 u tri različita cijela broja. Dokaži da $P(x)$ nema cjelobrojnih nula.
- (5) Polinom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ima nule x_1, x_2, \dots, x_n . Polinom $Q(x) = x^{n+1} + b_nx^n + \dots + b_1x + b_0$ ima nule y_1, y_2, \dots, y_{n+1} . Dokaži da je

$$P(y_1)P(y_2) \cdots P(y_{n+1}) = Q(x_1)Q(x_2) \cdots Q(x_n).$$

6.2. Teži.

- (1) Na tabli su napisani polinomi $x, x^3, x^5, \dots, x^{2025} \dots$ (monomi neparnog stepena. Ako na tabli pišu polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ dozvoljeno je napisati nešto od sljedećeg $aP(x) + b; a, b \in \mathbb{R}, a > 0, P(x) + Q(x), P(Q(x))$. Da li se na tabli može pojaviti polinom $x^{2025} - 2025x + 1$?
- (2) Neka je $f(x)$ polinom stepena 3 sa vodećim koeficijentom 2 za koji vrijedi $f(2014) = 2015; f(2015) = 2016$. Izračunaj $f(2016) - f(2013)$.
- (3) Ako je $P(x) = f(x^3) + xg(x^3)$ djeljiv sa $x^2 + x + 1$ dokaži da su $f(x)$ i $g(x)$ djeljivi sa $x - 1$.

6.3. Teško.

- (1) Na tabli je napisano 100 brojeva. Nakon što se svaki od njih poveća za jedan, proizvod svih sto se ne mijenja. Nastavimo postupak n puta, i proizvod je uvijek isti. Odrediti najveći mogući n .
- (2) Ako je $x + y + z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ nadjati maksimum vrijednosti izraza $|(x - y)(x - z)(y - z)|$.
- (3) Ako za polinome P i Q vrijedi $P^2(x) = 1 + Q^3(x)$ dokaži da su oba polinoma konstante.
- (4) Neka su P i Q monični polinomi čiji je nzd $(x - 1)(x - 2)$, a NZS $(x - 1)^2(x - 2)^3(x - 3)(x + 1)$. Koliko ima polinoma P za koje postoji polinom Q koji ispunjava uslove zadatka i za koji je $stP < stQ$?