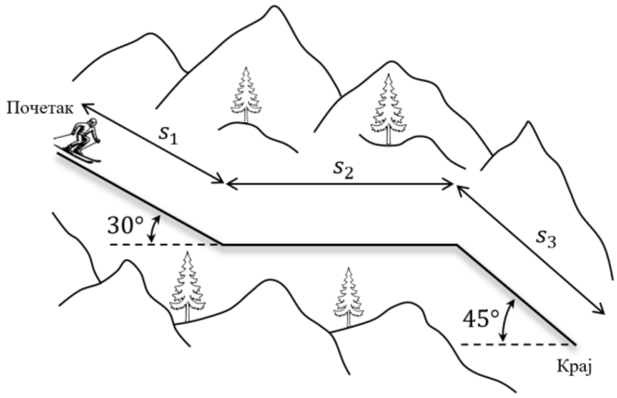
VIII РАЗРЕД

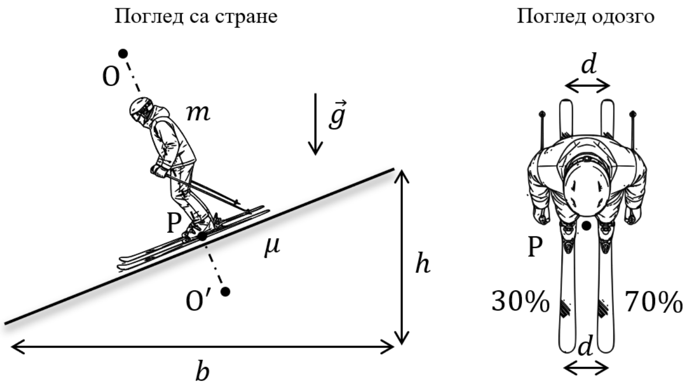
1. Скијање је један од најпознатијих зимских спортова у коме се кретање скијаша низ сњежну падину може описати законима механике.

(а) Скијаш без почетне брзине започиње спуст низ стазу приказану на слици 1.а. Први дио стазе је нагнут под углом од 30° у односу на хоризонталу и дугачак је $s_1 = 115$ m. Након њега стаза постаје хоризонтална, а дужина овог дијела стазе износи $s_2 = 140$ m. Стаза се завршава стрмом дионицом дужине $s_3 = 80$ m која је нагнута под углом од 45° у односу на хоризонталу. Израчунати вријеме t потребно да скијаш дође од почетка до краја стазе. Занемарити трење између скија и снијега, као и силу отпора ваздуха.



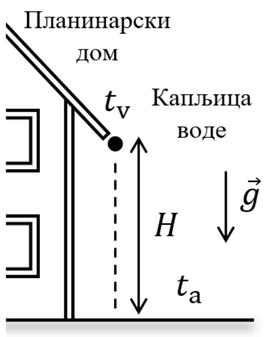
Слика 1.а

(б) Нагиб скијашке стазе k се дефинише као количник вертикалног пада h и хоризонталне дужине b (слика 1.б), а најчешће се изражава у процентима. Да би скијаш који се спушта право низ стазу нагиба $k = 50\%$ иницирао заокрет око осе симетрије тијела OO' он се са 70% своје тежине ослања на лијеву скију, а са преосталих 30% на десну. Израчунати резултујући момент силе трења M_R у односу на осу OO' која је нормална на стазу и пролази кроз њу у тачки P. Растојање између скија је $d = 30$ cm, а тачка P се налази на половини овог растојања. Маса скијаша је $m = 80$ kg, а коефицијент трења између снијега и скија је једнак $\mu = 0{,}1$.



Слика 1.б

Слика 2.а



Слика 2.б

2. (а) Да би се окријепио након напорног спута скијаш уз себе има термос боцу са $V_C = 1\ \ell$ чаја почетне температуре $t_C = 60$ °C. Како не може да пије врео чај, он је у њега убацио комад леда масе $m_L = 75$ g и температуре $t_L = -6$ °C. Колика ће бити крајња температура чаја t_K послије топљења леда и успостављања топлотне равнотеже? Сматрати да је термос боца суд који је топлотно изолован од околине.

(б) Са стрехе планинарског дома, на висини $H = 6$ m, без почетне брзине се одваја капљица воде почетне температуре $t_v = 4$ °C. Током лета кроз атмосферу капљица размјењује топлоту са околином, хлади се и замрзава прије него што падну на тло. Брзина преноса топлоте са капљице на околину је дефинисана количином топлоте коју капљица ослободи у јединици времена, тј. снагом преноса топлоте P:

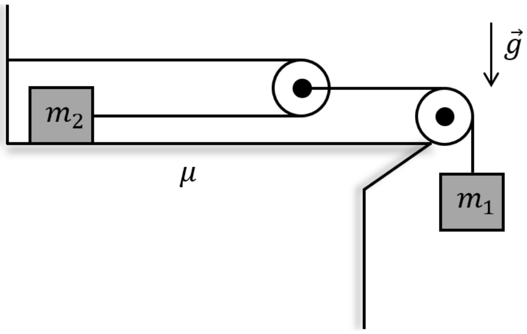
$$P = h_c A (T_p - T_a)$$

гдје је: h_c константа хлађења, A површина капљице, T_p почетна температура капљице и T_a температура околног ваздуха (амбијента).

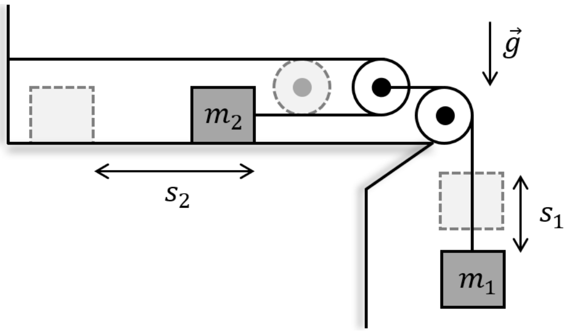
Израчунати највећи полупречник капљице воде r_{max} такав да се капљица воде потпуно замрзне прије него што падне на тло ако је температура ваздуха једнака $t_a = -6$ °C. Капљица се може моделовати лоптом чији полупречник током времена остаје непромијењен. Површина лопте полупречника r се израчунава по формули: $A = 4r^2\pi$, а запремина $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

На мјестима гдје је то потребно, користити: густина воде $\rho = 1\,000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, специфични топлотни капацитет воде $c_V = 4\,200\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}$ и леда $c_L = 2\,100\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}$, латентна топлота топљења/очвршћавања леда $\lambda = 340\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, константа хлађења $h_c = 108\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}}$.

3. На слици 3. је приказан систем који се састоји од блокова чије су масе $m_1 = 2$ kg и $m_2 = 3$ kg. Блок масе m_2 се налази на хоризонталној подлози коју карактерише коефицијент трења $\mu = 0{,}25$ и повезан је са блоком масе m_1 лаким, неистегљивим нитима пребаченим преко идеалних, идентичних, лаких котурова од којих је један покретан, а други непокретан. Горње нити су све вријеме затегнуте и хоризонталне.
(а) Полазећи од чињенице да се дужине нити не мијењају, рачунски показати да за пређене путеве блокова важи $s_1 : s_2 = 1 : 2$. На слици 3.а су свијетло сивом бојом приказане почетне позиције свих елемената.
(б) Уважавајући релацију $s_1 : s_2 = 1 : 2$, израчунати убрзања блокова a_1 и a_2.

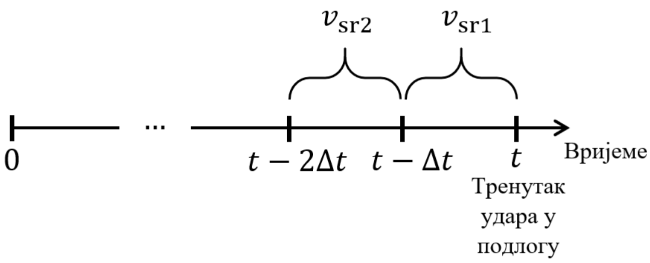


Слика 3.



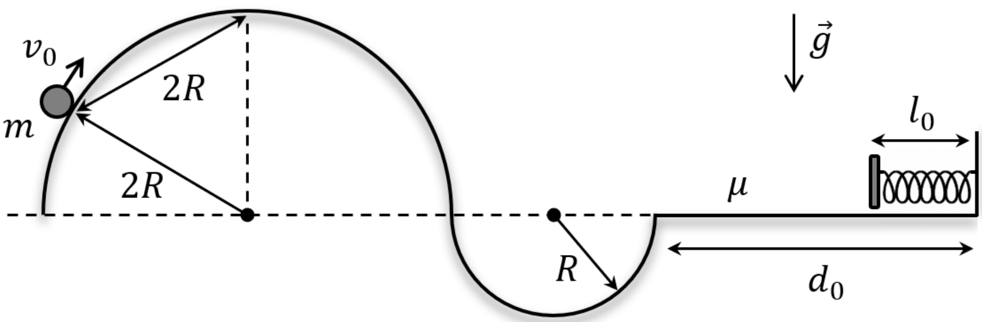
Слика 3.а

4. У посљедњој секунди слободног падања средња брзина тијела је дупло већа него у претпосљедњој. Са које висине h пада тијело?



Слика 4.

5. Тијело занемарљивих димензија је пуштено да се креће по површини глатке и непокретне полусфере полупречника $2R$. Почетно растојање тијела од највише тачке полусфере је једнако њеном полупречнику. Почетна брзина тијела је $v_0 = \sqrt{2gR}$, а њен правац је тангенцијалан у односу на полусферу. Након што се спусти низ полусферу полупречника $2R$, тијело се креће унутар идеално глатке полусферне јаме полупречника R, а затим по храпавој хоризонталној подлози. Укупна дужина ове хоризонталне подлоге је $d_0 = 85$ cm, а на њеном крају се налази опруга коефицијента еластичности $k = 1{,}9\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$. Коефицијент трења између тијела и хоризонталне подлоге је $\mu = 0{,}4$, маса тијела је $m = 515$ g, а $R = 30$ cm. Тијело ни у једном тренутку времена не губи контакт са подлогом.
(а) Израчунати највећу брзину $v_{\max}$ коју тијело достиже при свом кретању.
(б) Ако је максимално сабијање опруге при судару са тијелом једнако $x = 4{,}5$ cm, израчунати дужину неистегнуте опруге l_0.



Слика 5.

***Напомена**:* у рјешавању задатака користити: $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

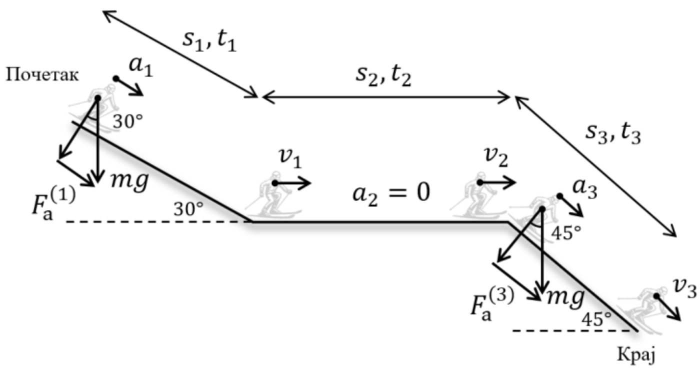
Задатке припремио: *Борис Баришић*
Рецензент: *Милко Бабић*

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА VIII РАЗРЕД

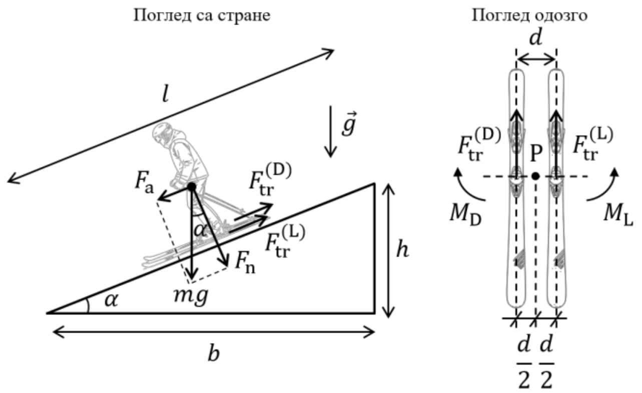
1. $s_1 = 115\ \mathrm{m}, s_2 = 140\ \mathrm{m}, s_3 = 80\ \mathrm{m}, k = 50\% = 0{,}5, d = 30\ \mathrm{cm}, m = 80\ \mathrm{kg}, \mu = 0{,}1, t = ?, M_\mathrm{R} = ?$

(а) На првом дијелу стазе скијаш се креће равномјерно убрзано без почетне брзине са убрзањем $a_1 = \frac{g}{2}$ **(1п)**, тј. $a_1 = 4{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ **(0,5п)**. Пут који скијаш прелази је $s_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$ **(0,5п)**, одакле је $t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}}$ **(0,5п)**, односно $t_1 = 6{,}85\ \mathrm{s}$ **(0,5п)**. Брзина скијаша при преласку на хоризонтални дио стазе је $v_1 = a_1 t_1$ **(0,5п)**, тј. $v_1 = 33{,}56\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **(0,5п)**. Како се на овом дијелу стазе скијаш креће равномјерно праволинијски, важи да је: $t_2 = \frac{s_2}{v_1}$ **(0,5п)**, односно: $t_2 = 4{,}17\ \mathrm{s}$ **(0,5п)**. На посљедњем дијелу стазе скијаш се креће равномјерно убрзано са почетном брзином $v_2 = v_1$ **(0,5п)** и убрзањем $a_3 = \frac{g\sqrt{2}}{2}$ **(1п)**, тј. $a_3 = 6{,}94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ **(0,5п)**. Вријеме за које скијаш прелази овај дио стазе је: $t_3 = \frac{v_3 - v_2}{a_3}$ (1) **(0,5п)**, а његов пређени пут је: $s_3 = v_2 t_3 + \frac{a_3 t_3^2}{2}$ (2) **(0,5п)**. Замјеном (1) у (2) добијамо крајњу брзину скијаша: $v_3 = \sqrt{v_2^2 + 2a_3 s_3}$ **(0,5п)**, тј. $v_3 = 47{,}29\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **(0,5п)**. Сада је на основу (1): $t_3 = 1{,}98\ \mathrm{s}$ **(0,5п)**. Укупно вријеме кретања скијаша је: $t = t_1 + t_2 + t_3$ **(0,5п)** или замјеном претходних резултата $t = 13\ \mathrm{s}$ **(0,5п)**.

(б) Како се скијаш налази на стази која је нагнута у односну на хоризонталну подлогу укупна сила којом он притиска скије је једнака нормалној компоненти силе Земљине теже F_n. На основу сличности троуглова можемо писати: $\frac{F_\mathrm{n}}{mg} = \frac{b}{l}$, односно: $F_\mathrm{n} = mg\frac{b}{l}$ (3) **(1п)**, гдје је $l = \sqrt{h^2 + b^2}$ (4) **(0,5п)**. Нагиб стазе је $k = \frac{h}{b}$ (5) **(0,5п)**, па замјеном (4) у (3) и на основу (5) добијамо: $F_\mathrm{n} = \frac{mg}{\sqrt{1+k^2}}$ **(1п)**. Ова сила се расподјељује на лијеву и десну скију: $F_\mathrm{n}^{(\mathrm{L})} = 0{,}7F_\mathrm{n}$ **(0,5п)** и $F_\mathrm{n}^{(\mathrm{D})} = 0{,}3F_\mathrm{n}$ **(0,5п)**. Силе трења које дјелују на скије су: $F_\mathrm{tr}^{(\mathrm{L})} = \mu F_\mathrm{n}^{(\mathrm{L})}$ **(0,5п)** и $F_\mathrm{tr}^{(\mathrm{D})} = \mu F_\mathrm{n}^{(\mathrm{D})}$ **(0,5п)**, а моменти које оне стварају у односу на осу OO' која пролази кроз тачку P: $M_\mathrm{L} = F_\mathrm{tr}^{(\mathrm{L})}\frac{d}{2}$ **(1п)** и $M_\mathrm{D} = F_\mathrm{tr}^{(\mathrm{D})}\frac{d}{2}$ **(1п)**. Резултујући момент силе трења је једнак: $M_\mathrm{R} = M_\mathrm{L} - M_\mathrm{D}$ **(1п)**. Замјеном горњих релација у претходни израз добијамо: $M_\mathrm{R} = \frac{0{,}2mg\mu d}{\sqrt{1+k^2}}$ **(1п)**, односно након замјене бројних вриједности: $M_\mathrm{R} = 4{,}2\ \mathrm{Nm}$ **(0,5п)**.



Слика 1.а



Слика 1.б

2. $V_\mathrm{C} = 1\ \ell, t_\mathrm{C} = 60\ °\mathrm{C}, m_\mathrm{L} = 75\ \mathrm{g}, t_\mathrm{L} = -6\ °\mathrm{C}, H = 6\ \mathrm{m}, t_\mathrm{v} = 4\ °\mathrm{C}, t_\mathrm{a} = -6\ °\mathrm{C}, \rho = 1\,000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$,
$c_\mathrm{V} = 4\,200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\cdot°C}}, c_\mathrm{L} = 2\,100\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\cdot°C}}, \lambda = 340\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}, h_\mathrm{c} = 108\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\cdot K}}, t_0 = 0\ °\mathrm{C}, t_\mathrm{K} = ?, r_\mathrm{max} = ?$

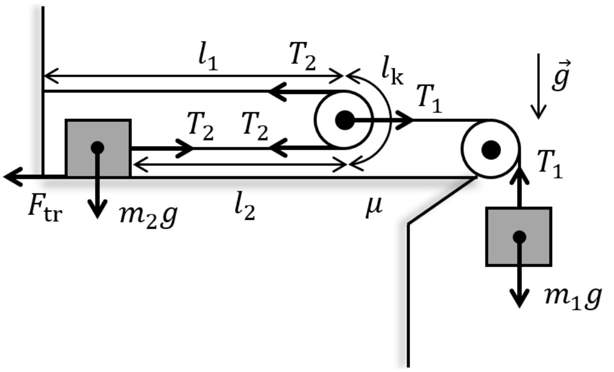
(а) Комад леда се прво загријава до 0 °C и при томе прима топлоту $Q_1 = m_\mathrm{L} c_\mathrm{L}(t_0 - t_\mathrm{L})$ (1) **(1п)**. Затим се топи, при чему је топлота фазног прелаза: $Q_2 = m_\mathrm{L}\lambda$ (2) **(1п)**. И на крају се вода настала топљењем загријава до крајње температуре чаја t_K: $Q_3 = m_\mathrm{L} c_\mathrm{V}(t_\mathrm{K} - t_0)$ (3) **(1п)**. Укупна количина топлоте коју лед прими је: $Q_L = Q_1 + Q_2 + Q_3$ (4) **(1п)**. У исто вријеме чај се хлади и отпушта количину топлоте једнаку: $Q_C = m_C c_V (t_C - t_K)$ (5) **(1п)** гдје је $m_C = \rho V$ (6) **(1п)** маса чаја. Како нема топлотних губитака мора да важи: $Q_L = Q_C$ **(1п)** што уз (1) ... (6) даје: $t_K = \frac{\rho V c_V t_C - m_L[c_L(t_0 - t_L) + \lambda - c_V t_0]}{c_V(\rho V + m_L)}$ **(2п)**. Замјеном бројних вриједности у претходни израз добијамо: $t_K \approx 50\ ^\circ\mathrm{C}$ **(1п)**.

(б) Вријеме које капљица проведе у лету је $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ **(1п)**, односно: $t = 1{,}11\ \mathrm{s}$ **(1п)**. Током лета капљица мора прво да се охлади до 0 ℃, а затим да се потпуно замрзне и при томе отпусти количину топлоте $Q = mc_V(t_v - t_0) + m\lambda$ (7) **(1п+1п)**, гдје је $m = \rho \frac{4}{3} r_{\max}^3 \pi$ (8) **(1п)** маса капљице. Снага преноса топлоте са капљице на околину $P = \frac{Q}{t}$ (9) **(1п)** је једнака: $P = h_c A(t_v - t_a)$ (10) **(1п)**, гдје је $A = 4r_{\max}^2 \pi$ (11) површина капљице. Замјеном (7) и (10) у (9) добијамо: $h_c A(t_v - t_a)t = mc_V(t_v - t_0) + m\lambda$, што уз (8) и (11) даје: $r_{\max} = \frac{3h_c t(t_v - t_a)}{\rho[c_V(t_v - t_0) + \lambda]}$ **(2п)** или уз бројне вриједности: $r_{\max} \approx 10\ \mu\mathrm{m}$ **(1п)**.

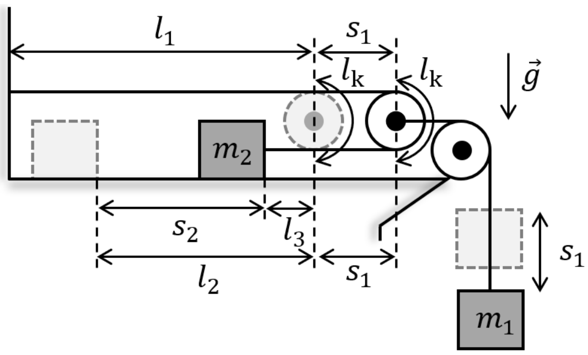
3. $m_1 = 2\ \mathrm{kg}, m_2 = 3\ \mathrm{kg}, \mu = 0{,}25, s_1 : s_2 = 1 : 2, a_1 = ?, a_2 = ?$

(а) На основу слике 3. за дужину нити којом је везан блок m_2 можемо писати: $L = l_1 + l_k + l_2$ (1) **(1п)** гдје је са l_k означен полуобим котура. Блок m_1 је директно везан за покретни котур па помијерањем блока за растојање s_1 (нема промјене дужине нити) долази и до помијерања котура за исто то растојање. Сада на основу слике 3.а можемо писати: $L = l_1 + s_1 + l_k + s_1 + l_3$ (2) **(1п)** гдје је $l_3 = l_2 - s_2$ (3) **(1п)**. Изједначавањем (1) и (2) и на основу (3) добијамо: $2s_1 = s_2$ **(1п)** што је требало и показати.

(б) За блокове важи $2s_1 = s_2$, гдје је $s_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$ **(1п)** и $s_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$ **(1п)**. Замјеном израза за пређени пут у полазну релацију добијамо да за убрзања блокова важи: $2a_1 = a_2$ **(1п)**. Једначине кретања блокова су: $m_1 a_1 = m_1 g - T_1$ **(3п)** и $m_2 a_2 = T_2 - F_{tr}$ **(3п)**, гдје је $T_1 = 2T_2$ **(2п)** и $F_{tr} = m_2 g \mu$ **(1п)**. Из претходних једначина се добија $a_1 = \frac{m_1 - 2m_2\mu}{m_1 + 4m_2} g$ **(2п)** или након замјене бројних вриједности: $a_1 = 0{,}35\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ **(1п)**, односно: $a_2 = 0{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ **(1п)**.



Слика 3.



Слика 3.а

4. $v_{sr1} = 2v_{sr2}, h = ?$

Нека је t укупно вријеме кретања тијела, а $\Delta t = 1\ \mathrm{s}$. Брзина тијела на крају пута износи $v = gt$ (1) **(1п)**, на почетку посљедње секунде $v_1 = v - g\Delta t$ **(2п)** односно $v_1 = g(t - \Delta t)$ (2) **(1п)**, а на почетку претпосљедње секунде $v_2 = v - 2g\Delta t$ **(2п)** односно $v_2 = g(t - 2\Delta t)$ (3) **(1п)**.

I начин: Пут који тијело прелази у посљедњој секунди је $h_1 = v_1\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}$ (4) **(2п)**, а у претпосљедњој: $h_2 = v_2\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}$ (5) **(2п)**. Средња брзина тијела у посљедњој секунди је: $v_{\mathrm{sr1}} = \frac{h_1}{\Delta t}$ (6) **(1п)**, а у претпосљедњој: $v_{\mathrm{sr2}} = \frac{h_2}{\Delta t}$ (7) **(1п)**. Како важи: $v_{sr1} = 2v_{\mathrm{sr2}}$ (8) **(1п)**, замјеном (6) и (7) у (8) и на основу (4) и (5) добијамо: $v_1 + \frac{g\Delta t}{2} = 2\left(v_2 + \frac{g\Delta t}{2}\right)$ (9) **(2п)**. Сада замјеном (2) и (3) у (9) добијамо: $t = \frac{5}{2}\Delta t$ **(1п)** тј. $t = 2{,}5\ \mathrm{s}$ **(1п)**.

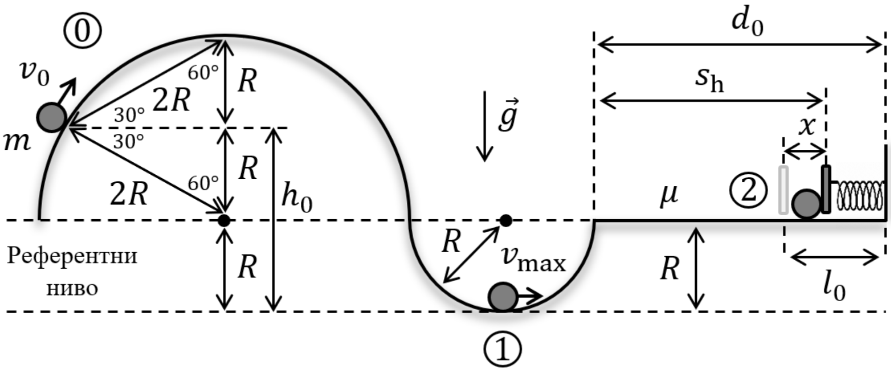
II начин: Средња брзина у посљедњој секунди је: $v_{\mathrm{sr1}} = \frac{v_1+v}{2}$ (10) **(3п)**, а у претпосљедњој секунди: $v_{\mathrm{sr2}} = \frac{v_2+v_1}{2}$ (11) **(3п)**. Како важи: $v_{sr1} = 2v_{\mathrm{sr2}}$ (12) **(1п)**, замјеном (10) и (11) у (12) и на основу (1), (2) и (3) добијамо: $\frac{g(2t-\Delta t)}{2} = 2\frac{g(2t-3\Delta t)}{2}$ **(2п)**, одакле је : $t = \frac{5}{2}\Delta t$ **(1п)** тј. $t = 2{,}5\ \mathrm{s}$ **(1п)**.

Висина са које тијело пада је: $h = \frac{gt^2}{2}$ **(1п)**, односно $h = 30{,}66\ \mathrm{m}$ **(1п)**.

5. $v_0 = \sqrt{2gR}, d_0 = 85\ \mathrm{cm}, k = 1{,}9\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}, \mu = 0{,}4, m = 515\ \mathrm{g}, R = 30\ \mathrm{cm}, x = 4{,}5\ \mathrm{cm}, v_{\mathrm{max}} =?, l_0 =?$

(а) Највећу кинетичку енергију, а самим тим и највећу брзину, тијело достиже у тренутку када је његова потенцијална енергија најмања тј. у положају 1 приказаном на слици. Укупна механичка енергија тијела у почетном положају (положај 0) је: $E_0 = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$ (1) **(1п+1п)**, гдје је $h_0 = 2R$ (2) **(1п)** и $v_0 = \sqrt{2gR}$. У положају 1 укупна механичка енергија тијела је: $E_1 = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{max}}^2$ (3) **(2п)**. Како између ова два положаја нема дјеловања силе трења, мора да важи: $E_0 = E_1$ (4) **(2п)**. Замјеном (1) и (3) у (4) и на основу (2) добијамо: $v_{\mathrm{max}} = \sqrt{6gR}$ **(1п)**, односно $v_{\mathrm{max}} = 4{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **(1п)**.

(б) При кретању по хоризонталној подлози тијело прелази пут $s_{\mathrm{h}} = d_0 - l_0 + x$ (5) **(2п)**, а на њега дјелује сила трења интензитета $F_{\mathrm{tr}} = mg\mu$ (6) **(1п)**. Рад који изврши сила трења је: $A_{\mathrm{tr}} = F_{\mathrm{tr}}s_{\mathrm{h}}$ (7) **(2п)**. Опруга је максимално сабијена у тренутку када се тијело заустави (положај 2). Тада је укупна механичка енергија једнака потенцијалној и износи: $E_2 = mgR + \frac{1}{2}kx^2$ (8) **(1п+1п)**. На основу закона о одржању механичке енергије важи: $E_0 - E_2 = A_{\mathrm{tr}}$ (9) **(2п)**. Замјеном (1), (7) и (8) у (9) и на основу (5) и (6) добијамо: $l_0 = d_0 + x - \frac{4mgR-kx^2}{2mg\mu}$ **(1п)**. Након замјене бројних вриједности у претходни израз, добијамо: $l_0 = 0{,}35\ \mathrm{m} \rightarrow l_0 = 35\ \mathrm{cm}$ **(1п)**.



Слика 5.