32. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА

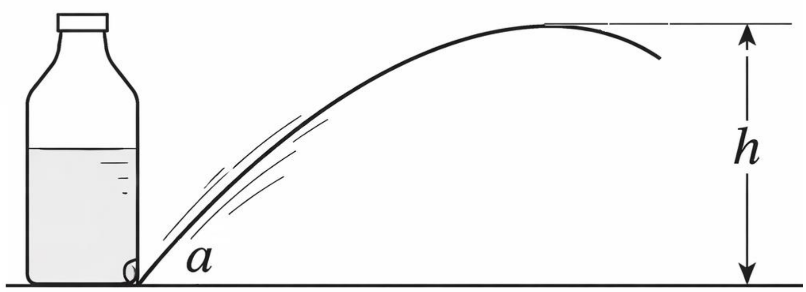
СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (28. март 2026)

II РАЗРЕД

1. Марко се припрема за рођенданску забаву и жели да надува велики сферни балон. У почетку, балон је празан (његова почетна запремина је занемарљива). Марко удахне ваздух из околине, гдје је атмосферски притисак $p_a = 101,3\ \mathrm{kPa}$, а затим једним пуним максималним издисајем удува сву количину ваздуха из својих плућа у балон. Након издисаја, балон добија облик сфере полупречника $r = 10,5\ \mathrm{cm}$. Сматра се да је балон од еластичне гуме и да притисак унутар балона прелази атмосферски због Лапласовог допунског притиска. Сматра се да балон има сферни облик и да има двије површине (спољну и унутрашњу). Површински напон гуме је константан и износи $\sigma = 120\ \mathrm{N/m}$. Под претпоставком да се температура ваздуха никако не мијења и да се ваздух понаша као идеалан гас, израчунати запремину Маркових плућа V_{pl} -- односно количину ваздуха при атмосферском притиску која је била у плућима пре издисаја.

2. Запремина $V = 120\ \mathrm{cm}^3$ воде у алуминијумском калориметру масе $m_k = 200\ \mathrm{g}$ хлади се током времена $t_v = 15\ \mathrm{min}$ са почетне температуре $t_1 = 50\ ^\circ\mathrm{C}$ на крајњу температуру $t_2 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ у хладној просторији. Иста запремина уља густине $\rho_u = 0,8\ \mathrm{g/cm}^3$ хлади се током времена $t_u = 9\ \mathrm{min}$ у истом калориметру, такође са почетне температуре $t_1 = 50\ ^\circ\mathrm{C}$ на крајњу температуру $t_2 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, под истим спољашњим условима температуре и притиска у датој просторији. Претпоставити да је брзина одавања топлоте околини иста у оба случаја. Израчунати специфични топлотни капацитет уља c_u. Специфични топлотни капацитет алуминијума је $c_k = 900\ \mathrm{J/(kg\ ^\circ C)}$, а воде $c_v = 4200\ \mathrm{J/(kg\ ^\circ C)}$. Густина воде је $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m}^3$.

3. Приликом пада боце на чврсту хоризонталну подлогу, на самом дну боце (у нивоу тла) настала је мала пукотина (слика 1). Због чињенице да је притисак унутар боце већи од притиска околине, вода излази кроз пукотину под углом $\alpha = 60^\circ$ у односу на хоризонталну подлогу. Млаз воде је достигао максималну висину $h = 1,80\ \mathrm{m}$ у односу на ниво подлоге. Одредити апсолутни притисак p_{un} у течности непосредно уз пукотину унутар боце након удара, ако атмосферски притисак у просторији износи $p_a = 101,3\ \mathrm{kPa}$. Занемарити вискозност течности, отпор ваздуха и брзину спуштања нивоа воде унутар боце. Боца је затворена све вријеме, а површина попречног пресјека боце је много већа од површине пукотине. Густина воде је $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m}^3$.

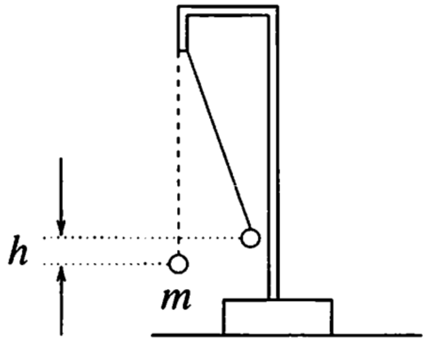


Слика 1. Слика уз задатак 3.

4. Систем се састоји од стиропорне лоптице ($\rho_s = 50\ \mathrm{kg/m^3}, V_s = 600\ \mathrm{cm^3}$) и оловног утега ($m_m = 100\ \mathrm{g}, \rho_m = 11300\ \mathrm{kg/m^3}$), повезаних танком нерастегљивом нити дужине $L = 50\ \mathrm{cm}$. Систем се пушта из стања мировања са дубине на којој се средиште стиропорне лоптице налази $d = 1,5\ \mathrm{m}$ испод површине воде ($\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$). Отпор воде и ваздуха, као и потисак ваздуха, занемарити.

а) Израчунати убрзање система a_1 и силу затезања нити T_1 док се систем креће кроз воду.
б) Анализирати да ли нит остаје затегнута у тренутку када стиропорна лоптица напусти воду.
в) Одредити максималну висину h_{max} (мјерену од површине воде) до које ће доспјети средиште стиропорне лоптице.

5. Мала, позитивно наелектрисана куглица масе $m = 2\ \mathrm{g}$ окачена је о танку изолациону нит дужине $l = 50\ \mathrm{cm}$ (слика 2). Друга, идентична позитивно наелектрисана куглица полако се приближава са велике удаљености и фиксира се тачно у тачку у којој се налазила прва куглица прије помјерања (директно испод тачке вјешања). Ако обе куглице носе исто наелектрисање $q = Q = 0,1\ \mu\mathrm{C}$, израчунати висину h за коју ће се прва куглица подићи у свом новом равнотежном положају. Узети да је Кулонова константа $k = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$.
Напомена: Угао отклона није мали, па не важе апроксимације за мали угао.



Слика 2. Слика уз задатак 5.

У свим задацима узети за вриједност гравитационог убрзања $g = 9,81\ \frac{m}{s^2}$.

Задатке припремила: *Александра Радић*
Рецензент: *Проф. др Милан Пантић, ПМФ Нови Сад*

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА II РАЗРЕД

1. Задати подаци:

- Атмосферски притисак: $p_a = 101,3\ \mathrm{kPa}$
- Коначни полупречник балона: $r = 10,5\ \mathrm{cm}$
- Коефицијент површинског напона гуме: $\sigma = 120\ \mathrm{N/m}$

Сав ваздух који ће завршити у балону првобитно се налази у Марковим плућима под атмосферским притиском p_a. Према једначини стања идеалног гаса, за тај ваздух важи:

$$p_a V_{pl} = nRT$$

Након издисаја, иста количина гаса n заузима запремину балона V_b. Запремина сфере износи:

$$V_b = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Притисак у балону p_b је већи од атмосферског због напона гуме. Користећи Лапласову формулу за сферну опну са двије површине (унутрашњом и спољашњом), притисак је:

$$p_b = p_a + \frac{4\sigma}{r}$$

Једначина стања ваздуха у балону је тада:

$$p_b V_b = nRT$$

Будући да је процес изотерман, производ nRT остаје непромијењен. Изједначавањем претходних израза добијамо:

$$p_a V_{pl} = p_b V_b$$

Замјеном израза за притисак p_b и запремину V_b:

$p_a V_{pl} = \left(p_a + \dfrac{4\sigma}{r}\right) \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3$ и дијељењем цијеле једначине са p_a, добијамо формулу за запремину плућа:

$$V_{pl} = \frac{(p_a + \frac{4\sigma}{r}) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{p_a}$$

- Запремина балона:
  $V_b = \dfrac{4}{3} \cdot 3,14159 \cdot (0,105)^3 \approx 4,849 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = 4,849\ \mathrm{l}$
- Притисак у балону:
  $p_b = 101300 + \dfrac{4 \cdot 120}{0,105} = 101300 + 4571,4 \approx 105871,4\ \mathrm{Pa}$

Коначна запремина Маркових плућа:

$$V_{pl} = \frac{105871,4 \cdot 4,849 \cdot 10^{-3}}{101300} \approx 5,067 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

2. Задати подаци:

- Маса алуминијског калориметра: $m_k = 200 \text{ g}$
- Специфични топлотни капацитет алуминијума: $c_k = 900 \text{ J/(kg °C)}$
- Специфични топлотни капацитет воде: $c_v = 4200 \text{ J/(kg °C)}$
- Запремина воде, али и уља, јер су једнаке: $V = 120 \text{ cm}^3$
- Густина воде: $\rho_v = 1,0 \text{ g/cm}^3$
- Густина уља: $\rho_u = 0,8 \text{ g/cm}^3$
- Промјена температуре: $\Delta t = 50 \text{ °C} - 20 \text{ °C} = 30 \text{ °C}$
- Вријеме хлађења воде: $t_v = 15 \text{ min}$
- Вријеме хлађења уља: $t_u = 9 \text{ min}$

Основна претпоставка је да је средња снага хлађења P (брзина одавања топлоте околини) иста за оба система јер се хладе у истом посуђу, кроз исти температурни интервал и у истим спољашњим условима:

$$P = \frac{Q}{t}$$

- Систем: Вода + Калориметар:

Маса воде износи $m_v = \rho_v \cdot V = 1,0 \text{ g/cm}^3 \cdot 120 \text{ cm}^3 = 120 \text{ g}$.

Укупна топлота коју овај систем преда околини је:

$$Q_{v+k} = (m_v \cdot c_v + m_k \cdot c_k) \cdot \Delta t$$
$$Q_{v+k} = (120 \cdot 4,2 + 200 \cdot 0,9) \cdot 30$$
$$Q_{v+k} = (504 + 180) \cdot 30 = 20520 \text{ J}$$

Снага хлађења за овај систем је:

$$P = \frac{20520}{t_v} = \frac{20520}{15}$$

- Систем: Уље + Калориметар:

Маса уља износи $m_u = \rho_u \cdot V = 0,8 \text{ g/cm}^3 \cdot 120 \text{ cm}^3 = 96 \text{ g}$.

Топлота коју овај систем изгуби хлађењем је:

$$Q_{u+k} = (m_u \cdot c_u + m_k \cdot c_k) \cdot \Delta t$$
$$Q_{u+k} = (96 \cdot c_u + 200 \cdot 0,9) \cdot 30$$
$$Q_{u+k} = (96 \cdot c_u + 180) \cdot 30$$

Снага хлађења је идентична као у првом случају:

$$P = \frac{(96 \cdot c_u + 180) \cdot 30}{t_u} = \frac{(96 \cdot c_u + 180) \cdot 30}{9}$$

Изједначавањем израза за снагу добијамо:

$$\frac{20520}{15} = \frac{(96 \cdot c_u + 180) \cdot 30}{9}$$

Специфични топлотни капацитет уља је:

$$c_u = 2400 \text{ J/(kg °C)}$$

3. Дати подаци:

- Максимална висина млаза: $h = 1,80 \text{ m}$
- Угао истицања: $\alpha = 60°$
- Атмосферски притисак: $p_a = 101,3 \text{ kPa} = 101300 \text{ Pa}$
- Густина воде: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Убрзање Земљине теже: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Млаз течности се након изласка из пукотине креће као пројектил у пољу Земљине теже. Максимална висина h коју млаз достиже одређена је његовом вертикалном компонентом почетне брзине v_y. Примјеном закона одржања енергије за вертикални правац добијамо (признати и исправну кинематичку формулу):

$$\frac{1}{2}mv_y^2 = mgh$$

Из чега слиједи интензитет вертикалне компоненте брзине:

$$v_y = \sqrt{2gh}$$

Укупна брзина v којом течност напушта боцу повезана је са вертикалном компонентом преко угла α:

$$v_y = v \cdot \sin(\alpha)$$

Одавде је укупна брзина истицања:

$$v = \frac{v_y}{\sin(\alpha)} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin(\alpha)}$$

Квадрат брзине који је потребан за Бернулијеву једначину износи:

$$v^2 = \frac{2gh}{\sin^2(\alpha)}$$

Користимо струјницу од унутрашњости боце до излаза из пукотине (на истој висини). Будући да је површина попречног пресјека боце много већа од површине пукотине, брзину спуштања нивоа течности унутар боце сматрамо занемарљивом ($v_{un} \approx 0$).

$$p_{un} + \frac{1}{2}\rho v_{un}^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Поједностављивањем добијамо израз за апсолутни унутрашњи притисак:

$$p_{un} = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Уврштавањем израза за v^2 у упрошћену Бернулијеву једначину, добијамо:

$$p_{un} = p_a + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{2gh}{\sin^2(\alpha)}\right)$$

$$p_{un} = p_a + \frac{\rho g h}{\sin^2(\alpha)}$$

Сада уврштавамо бројне вриједности:

$$p_{un} = 101300 + \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 1,80}{\sin^2(60°)}$$

$$p_{un} = 124844 \text{ Pa} \approx 124,8 \text{ kPa}$$

4. Дати подаци:

- Густина и запремина стиропорне лоптице: $\rho_s = 50 \text{ kg/m}^3, V_s = 600 \text{ cm}^3$
- Маса и густина оловног утега: $m_m = 100 \text{ g}, \rho_m = 11300 \text{ kg/m}^3$
- Дужина нити: $L = 50 \text{ cm}$
- Дубина на којој се налази стиропорна лоптица: $d = 1,5 \text{ m}$
- Густина воде: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$

Израчунавамо масе, запремине и силе потиска:

- $m_s = \rho_s V_s = 50 \cdot 600 \cdot 10^{-6} = 0,03 \text{ kg}$
- $F_{ps} = \rho_v V_s g = 1000 \cdot 600 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81 = 5,886 \text{ N}$
- $V_m = m_m/\rho_m = 0,1/11300 = 8,85 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
- $F_{pm} = \rho_v V_m g = 1000 \cdot 8,85 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81 = 0,087 \text{ N}$

а) Убрзање система (a_1):

$$a_1 = \frac{(F_{ps} + F_{pm}) - (m_s + m_m)g}{m_s + m_m} = \frac{(5,886 + 0,087) - (0,13 \cdot 9,81)}{0,13}$$

$$a_1 = \frac{5,973 - 1,2753}{0,13} = 36,13 \text{ m/s}^2$$

Сила затезања (T_1):

Из једначине за утег: $F_{pm} + T_1 - m_m g = m_m a_1$

$$T_1 = m_m(a_1 + g) - F_{pm} = 0,1(36,13 + 9,81) - 0,087$$

$$T_1 = 4,594 - 0,087 = 4,507 \text{ N}$$

Сила $T_1 > 0$, дакле нит је под водом затегнута.

б) У тренутку када лоптица напусти воду, на њу више не дјелује F_{ps}, већ само гравитација.

- Убрзање лоптице (a_s) (ако би била слободна): $a_s = -g = -9,81 \text{ m/s}^2$.
- Убрзање утега (a_m) (ако би био слободан под водом):
  $$a_m = \frac{F_{pm} - m_m g}{m_m} = \frac{0,087 - 0,981}{0,1} = -8,94 \text{ m/s}^2$$

Пошто је убрзање утега "мање негативно" од убрзања лоптице ($|a_m| < |a_s|$), утег успорава спорије од лоптице. Стога, утег сустиже лоптицу одоздо. Због тога се нит у тренутку изласка лоптице из воде опушта ($T_2 = 0$). Од тог момента тијела се крећу независно.

Напомена: Прихватити и логично објашњење, попут сљедећег. Када лоптица изађе из воде на њу не дјелује више потисак воде нагоре (потисак ваздуха је занемарив), а надоле на лоптицу дјелује сила Земљине теже. Да би нит била затегнута, на стиропорну лоптицу мора дјеловати сила нагоре, што није више случај. Стога је сила затезања нити једнака нули.

Задатак под б) носи.

в) Лоптица излази из воде брзином v_0 коју је стекла на путу d са убрзањем a_1:

$$v_0^2 = 2a_1 d = 2 \cdot 36,13 \text{ m/s}^2 \cdot 1,5 \text{ m} = 108,39 \text{ (m/s)}^2$$

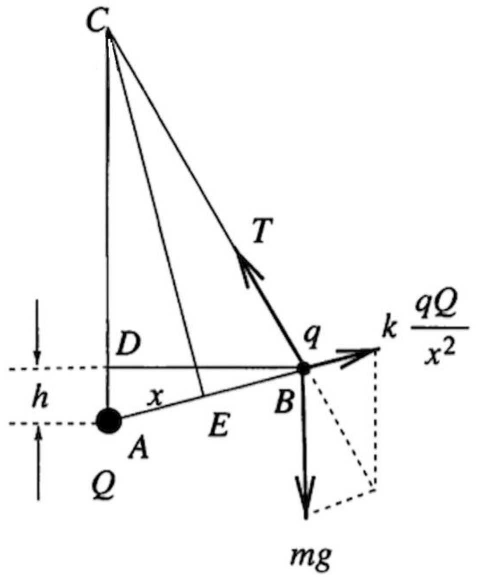
Од тренутка напуштања површине, лоптица се креће као тијело бачено вертикално навише у пољу Земљине теже (јер је нит опуштена и више је не вуче наниже):

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad h_{max} = \frac{108,39}{2 \cdot 9,81} = \frac{108,39}{19,62} = 5,52 \text{ m}$$

5. Дати подаци:
- Масе куглица: $m = 2 \text{ g}$
- Наелектрисања куглица: $q{=}Q{=}0{,}1\ \mu\text{C}$
- Дужина нити: $l = 50 \text{ cm}$

Посматрајмо систем у новом равнотежном положају. Нека је C тачка вјешања, A почетни положај куглице, а B њен нови положај, као што је приказано на слици 1. Будући да је дужина нити константна ($CA = CB = l$), троугао ABC је једнакокраки.

Растојање између куглица је основица овог троугла, x. Висина подизања h је вертикално растојање тачке изнад тачке A.



Слика 1. Вектори сила и одговарајући троуглови

Посматрајмо два правоугла троугла:

- Троугао CAE, гдје је E тачка на средини растојања x. Хипотенуза је l, а катета је $x/2$.
- Троугао који формира висина h са растојањем x.

Из сличности ових троуглова (или директно из дефиниције синуса истог угла), важи пропорција:

$$\frac{h}{x} = \frac{x/2}{l}$$

Из ове релације добијамо везу:

$$x^2 = 2lh$$

На куглицу у тачки B дјелују сила теже $F_g = mg$, Кулонова сила $F_e = k\frac{qQ}{x^2}$ и сила затезања нити T. Векторски збир ових сила је нула.

Троугао сила који граде $\vec{F}_g$ и $\vec{F}_e$ сличан је троуглу положаја (због паралелности страна). Из те сличности слиједи:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{x}{l}$$

Замјеном израза за силе:

$$\frac{k\frac{qQ}{x^2}}{mg} = \frac{x}{l} \implies x^3 = \frac{kqQl}{mg}$$

Сада комбинујемо формуле:

Пошто је $x = \sqrt{2lh}$, уврштавањем у једначину за x^3 добијамо:

$$(\sqrt{2lh})^3 = \frac{kqQl}{mg}$$

$$(2lh)^{3/2} = \frac{kqQl}{mg}$$

Квадрирањем:

$$8l^3h^3 = \frac{k^2q^2Q^2l^2}{m^2g^2}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{k^2q^2Q^2}{8lm^2g^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(9 \cdot 10^9)^2 \cdot (10^{-7})^4}{8 \cdot 0,5 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (9,81)^2}} \approx 0,0174 \text{ m} = 1,74 \text{ cm}$$