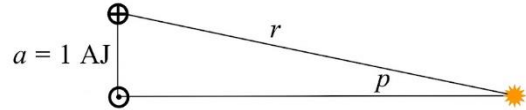


32. РЕГИОНАЛНО ТАКМИЧЕЊЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ (7. март 2026)

I РАЗРЕД

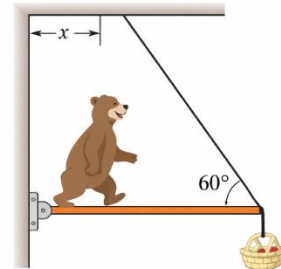
1. а) Годишња паралакса звијезде p је угао под којим се са те звијезде види полупречник Земљине орбите око Сунца. Ако паралаксу можемо мјерити, можемо израчунати и удаљеност звијезде од Сунца. Апроксимацијом за веома мале углове астрономи су утврдили да важи релација $p(\text{rad}) = a/r$, гдје је a удаљеност од Земље до Сунца која износи једну астрономску јединицу (АЈ), односно $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$, а r удаљеност од нас до те звијезде.



Сателит Хипаркос је 1989. године измјерио удаљености за 120 000 звијезда, а најмања паралакса коју је измјерио износила је $0,002''$ (лучне секунде). Колика је удаљеност те звијезде од нас (изражена у метрима)?

б) Честа мјерна јединица за растојање у астрономији је парсек (рс). Ако је годишња паралакса звијезде $1''$, та звијезда је удаљена од нас 1 рс. Процијени однос парсека и свјетлосне године (свјетлосна година представља пут који свјетлост у вакууму пређе за 365 дана, крећући се брзином $2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

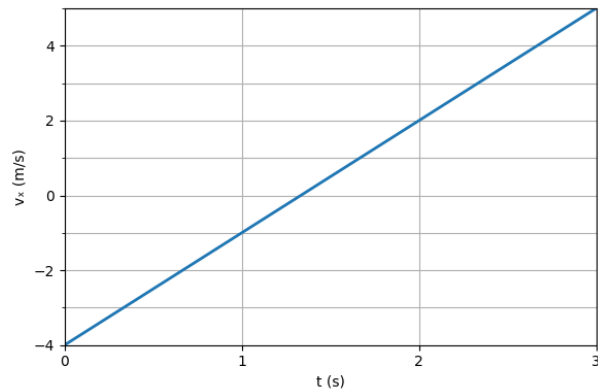
2. Гладни медвјед тежине 700 N хода по хоризонталној греди како би дохватио корпу са храном која виси на десном крају греде. Греда је хомогена, дужине 6 m и тежине 200 N . Корпа са храном има тежину 80 N . Греда је причвршћена за зид зглобом на лијевом крају, а на десном крају је придржава сајла која са гредом заклапа угао од 60° .



а) Нацртати дијаграм сила које дјелују на греду. Одредити силу затезања у сајли и компоненте силе реакције у зглобу (хоризонталну и вертикалну) у тренутку када се медвјед налази на растојању $x = 1 \text{ m}$ од зглоба.

б) Ако сајла може да издржи максималну затезну силу од 900 N , колико најдаље медвјед може да се удаљи од зглоба прије него што сајла пукне?

3. Двије константне хоризонталне силе \vec{F}_1 и \vec{F}_2 делују на тијело масе 4 kg које клизи по леду без трења, у хоризонталној x равни. Сила \vec{F}_1 дјелује у позитивном смјеру x – осе и има интензитет 7 N. Интензитет силе \vec{F}_2 је 10 N. На слици је приказана x – компонента брзине тијела v_x као функција времена t током клизања.



а) Колики је угао између сталних праваца сила \vec{F}_1 и \vec{F}_2 ?

б) Уколико је интензитет компоненте v_y у почетном тренутку једнак нули, а тијело се налазило у координатном почетку, одредити удаљеност тијела од координатног почетка након 3s.

4. Ријека тече сталном брзином од 2,5 m/s између паралелних обала удаљених 80 m. Треба да пренесеш пакет директно преко ријеке, али можеш пливати брзином од само 1,5 m/s.

(а) Ако желиш да ти вријеме проведено у води минимално, колико ћеш бити однесен струјом низводно?

(б) Пошто ти се прва опција не свиђа, одлучујеш да пливаш тако да је растојање за које ћеш бити однесен низводно минимално. Колико износи то минимално растојање?

5. Казаљка за часове и казаљка за минуте на Биг Бену (сат на торњу парламента у Лондону) имају дужине 2,70 m и 4,50 m, а масе 60 kg и 100 kg, редом. За потребе овог задатка, казаљке Биг Бена можемо апроксимирати дугачким, танким и хомогеним штаповима.

а) Одредити угаону брзину сваке казаљке изражене у rad/h (радијанима по сату)

б) Одредити укупни момент силе који потиче од тежине ових казаљки у односу на осу ротације када сат показује: (i) 3:00, (ii) 6:00

в) Изразити углове које казаљке заклапају са вертикалом као функцију времена, узимајући да је у тренутку $t = 0$ било 0.00 часова.

г) Користећи чињеницу да је $\sin \theta$ однос наспрамне катете и хипотенузе у правоуглом троуглу, изразити укупан момент као функцију времена. Уз помоћ добијеног израза, израчунати укупан момент сила у тренутку када је сат показивао 8:20 часова.

Напомена: Позитиван смјер ротације узимамо супротно смјеру казаљке на сату. Моменти који настоје да ротирају систем у том смјеру имају позитиван знак, док моменти у смјеру казаљке на сату имају негативан знак.

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА I РАЗРЕД

1. а) Потребно је прво претворити лучне секунде у степене, а затим у радијане. Важи:

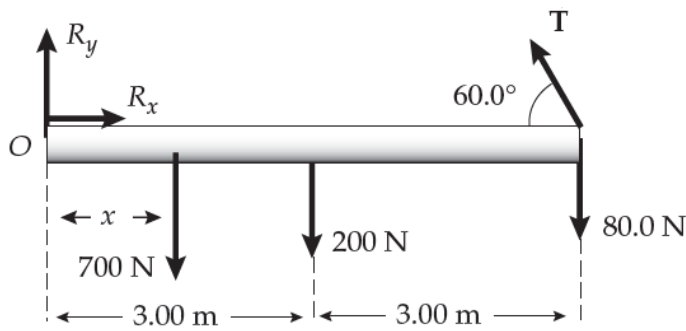
$$0,002'' = (0,002/3600)^\circ = (0,002/3600)^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = 9,696 \cdot 10^{-9} \text{ rad} .$$

Како је $p(\text{rad}) = a/r$, добијамо $r = \frac{a}{p(\text{rad})} = 1,543 \cdot 10^{19} \text{ m} .$

б) По дефиницији, парсек у метрима је $(1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}) / [(1/3600)^\circ \frac{\pi}{180^\circ}] = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$, док свјетлосна година у метрима износи $2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 9,454 \cdot 10^{15} \text{ m}$. Стога, однос парсека и свјетлосне године је $\frac{1 \text{ pc}}{1 \text{ sg}} = 3,264$.

2. а) Узимајући да је тачка ослонаца у зглобу, те да све силе осим силе затезања дјелују нормално на греду, можемо написати равнотежну једначину момената сила:

$\Sigma M = \frac{T\sqrt{3}}{2}l - Q_M x - Q_H l - Q_G \frac{l}{2} = 0$. Једноставним уврштавањем бројних вриједности, добија се $T = 343 \text{ N}$. Сад можемо искористити и једначину равнотеже сила по x – оси и



у – оси:

$$x: R_x - \frac{T}{2} = 0 \rightarrow R_x = 171,5 \text{ N}$$

$$y: R_y + \frac{T\sqrt{3}}{2} - Q_M - Q_G - Q_H = 0 \rightarrow R_y = 683 \text{ N}$$

б) Ако узмемо да је $T=900 \text{ N}$, можемо се вратити у једначину равнотеже момената сила, сматрајући да је x непознато. Рјешавањем једначине

добије се $x = 5,14 \text{ m}$.

3. а) Прво можемо наћи убрзање. Са графика видимо да се x -компонента брзине промијенила за $\Delta v_x = 9 \text{ m/s}$ током $t = 3 \text{ s}$, па је убрзање $a_x = \frac{\Delta v}{t} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Одавде је резултантна сила која дјелује на тијело по x -оси: $R_x = ma = 12 \text{ N}$. Знајући да \vec{F}_1 има интензитет 7 N и да дјелује у позитивном смјеру, онда можемо израчунати x -компоненту силе \vec{F}_2 , $F_{2x} = 12 \text{ N} - 7 \text{ N} = 5 \text{ N}$. Како је укупан интензитет те силе 10 N , а њена x -компонента је усмјерена у позитивном смјеру и дупло је мања, лако је закључити да сила \vec{F}_2 са x -осом, а самим тим и са силом \vec{F}_1 , заклапа угао од 60 степени!

б) Са графика се види да тијело у тренутку $t = 0 \text{ s}$ има брзину $v_{0x} = -4 \text{ m/s}$ (почетна брзина). Помјерај по x -оси налазимо формулом: $x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} = 1,5 \text{ m}$.

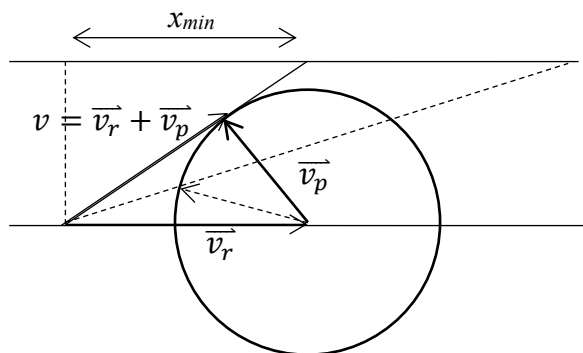
С друге стране, почетна брзина по у-оси је нула, па је помјерај по том правцу $y = \frac{1}{2} a_y t^2$.

Како сила \vec{F}_1 нема у-компоненту, резултанта по тој оси је $R_y = F_{2y} = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N}$ па лако добијамо одговарајуће убрзање $a_y = \frac{R_y}{m} = 2,165 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Тада је $y = 9,74 \text{ m}$. Коначно, Питагорином теоремом добијамо удаљеност од координатног почетка: $d = \sqrt{x^2 + y^2} = 9,85 \text{ m}$.

4. а) Да би вријеме проведено у води било минимално, треба пливати нормално на обалу, јер је тада нормална компонента резултантне брзине једнака цјелокупној брзини пливања v_p . Вријеме преласка ријеке је: $t = \frac{d}{v_p} = \frac{80,0}{1,50} = 53,3 \text{ s}$. За то вријеме ријека носи пливача низводно брзином v_r , па је растојање низводно на које је однесен: $x = v_r t = 133 \text{ m}$

б) У другом дијелу проблема, треба пронаћи како пливати, а да низводна удаљеност буде минимална. Ако ријека тече удесно, очигледно је треба пливати лијево укосо, тако да се напредује према другој обали, док се истовремено смањује укупна брзина којом вас ријека носи низводно. Угао под којим се налази најбољи баланс да ношење низводно буде најмање може се наћи на више начина, али најлакше га је схватити геометријски: Брзина ријеке је стална и увијек усмјерена хоризонтално удесно. Брзина којом пливамо је непромјенљива по интензитету, али је зато промјенљива по правцу (сам пливач бира)! Ако нацртамо вектор брзине ријеке, и на врх тог вектора покушамо да надовежемо могуће векторе брзине пливања, уочићемо да њихови врхови описују кружницу радијуса v_p . Путања пливача је у правцу резултујуће брзине $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p$. Са слике лако уочавамо да ће растојање низводно (x) бити најмање када је правац вектора резултантне брзине тангента на споменути кружницу (ако је правац брзине пливача \vec{v}_p другачији, као рецимо правац на слици означен испрекиданом линијом, растојање x ће бити веће). Ово значи да вектор брзине пливања и вектор резултантне брзине чине прави угао!



Да бисмо ријешили задатак, даље морамо наћи компоненте резултантне брзине! Најједноставније је уочити да је косинус угла који чине вектори брзине ријеке и брзине пливања једнак односу брзине пливања и брзине ријеке, $\cos \alpha = v_p / v_r$, одакле се налази да је дати угао $\alpha = 53,1^\circ$. Тада су компоненте резултанте $v = \vec{v}_p + \vec{v}_r$, $v_x = v_r - v_p \cos \alpha$ и $v_y =$

$v_p \sin \alpha$ и можемо наћи вријеме преласка на другу обалу: $t = \frac{d}{v_y} = 66,7\text{s}$ Type equation here.
 те минимално растојање низводно: $x = v_x t = (v_r - v_p \cos \alpha)t = 107\text{m}$.

II начин: Питагорином теоремом: $v = \sqrt{v_r^2 - v_p^2} = 2\text{m/s}$, а затим израчунати v_y формулом за висину правоуглог троугла која пада на хипотенузу: $v_y = \frac{v_p v}{v_r} = 1,2\text{ m/s}$ те $v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2} = 1,6\text{ m/s}$, $x = v_x t = 107\text{ m}$.

5. а) Угаоне брзине казаљки можемо изразити преко периода, формулом: $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Како је период мале (часовне) казаљке 12h, а период велике (минутне) казаљке 1h, добијамо: $\omega_M = \frac{\pi \text{ rad}}{6 \text{ h}}$ и $\omega_V = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{h}}$.

б) Када је тачно 6:00 сати, укупан момент сила је једнак нули, јер су краци обе казаљке једнаки нули. Када сат откуцава 3:00 сата, момент силе који потиче од тежине велике казаљке једнак је нули, док мала казаљка стоји хоризонтално, па је њен момент једнак: $M_M = -m_m g \frac{l_m}{2} = -794,6\text{Nm}$.

в) Углови које казаљке заклапају са вертикалом дати су са: $\theta_M = \omega_M t$ и $\theta_V = \omega_V t$.

г) Узмимо произвољан положај неке од казаљки. Момент силе биће $M = \frac{mgl}{2} \sin \theta$, гдје је θ угао који казаљка заклапа са вертикалом (правцем силе, који је овдје увијек вертикалан). Ово значи да је укупан момент силе у било којем тренутку t дат са:

$$M = -\left(\frac{m_M g l_M}{2} \sin \omega_M t + \frac{m_V g l_V}{2} \sin \omega_V t\right)$$

Сада треба претворити 8:20 сати у децималан број: 8:20 часова = 8,33h, па добијамо:

$$M = -\left(\frac{60 \cdot 9,81 \cdot 2,70}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 8,33\right) + \frac{100 \cdot 9,81 \cdot 4,5}{2} \sin 2\pi \cdot 8,33\right) = -1188\text{Nm}$$